Krajské kolo 2018/19, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

A Přehledový test

(max. 30 bodů)

Úvodní test se řeší online na http://olympiada.astro.cz/korespondencni. Přihlašovací údaje přišly úspěšným řešitelům školního kola e-mailem, nebo je dostanete od svého učitele, který je může zjistit v sekci pro učitele na http://olympiada.astro.cz/ucitel. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou. U problémů s řešením testu oznámených po **4. 1. 2019** bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení.

B Lost in Space

(max. 20 bodů)

Vesmírné plavidlo proletělo červí dírou a ocitlo se v neznámém bodě v prostoru a času. Astrofyzikální centrum lodi po několika měřeních doručilo na kapitánský můstek následující informace: nově naměřená teplota reliktního záření je $T = 0{,}3\,\mathrm{K}$ a křivost vesmíru je s velkou přesností (stejně jako v současnosti) nulová. Ve výpočtech níže se vám bude hodit, že ve vesmíru s nulovou křivostí nabývá celková hustota látky kritické hodnoty ρ_{krit}, pro kterou platí

$$\rho_{\mathrm{krit}} = \frac{3H^2}{8\pi G}\,,$$

kde H je Hubbleův parametr. Rovněž uvažujte, že Hubbleův parametr má v současnosti hodnotu $H_0 = (67{,}7 \pm 0{,}5)\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{Mpc}^{-1}$ a že současná teplota reliktního záření je $T_0 = 2{,}7\,\mathrm{K}$. V současnosti je 28 % hustoty látky ve vesmíru tvořeno hmotou (baryonovou a temnou). Hustota hmoty v důsledku rozpínání vesmíru klesá v čase, a to nepřímo úměrně třetí mocnině faktoru, o který se zvětšují vzdálenosti ve vesmíru. Zbytek látky je tvořen temnou energií, jejíž hustota se v čase nemění.

Předpokládejme nejdříve, že loď se stále nachází v našem vesmíru.

a) Posunula se loď v čase do budoucnosti, nebo do minulosti?

> Teplota reklitního záření v důsledku rozpínání vesmíru klesá v čase. Loď se tedy v čase posunula do budoucnosti.

b) Lze ze zadaných dat určit, o jakou vzdálenost se loď posunula v prostoru? Pokud ano, o kolik?

> Jelikož vesmír je na velkých škálách homogenní a izotropní, nedokážeme na základě zadaných (kosmologických) údajů určit, kam se loď posunula v prostoru.

c) Určete poměr vzdáleností ve vesmíru (vůči současným hodnotám), které astronomové na lodi po průchodu červí dírou naměří.

> Jelikož spektrum reliktního záření splňuje s velkou přesností Planckův zákon, můžeme vyjádřit střední vlnovou délku λ reliktních fotonů pomocí Wienova posunovacího zákona jako $\lambda = b/T$. Tato vlnová délka podléhá kosmologickému červenému posuvu a klesá v čase se stejným faktorem, jako kosmologické vzdálenosti ve vesmíru. Relativní velikost a vzdáleností ve vesmíru (vzhledem k jejich současným hodnotám), které by naměřila loď po průchodu červí dírou (tzv. *škálový faktor*, označujeme jako a), tedy spočteme jednoduše jako $a = \lambda/\lambda_0 = T_0/T = 9$.

Krajské kolo 2018/19, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Po dalších měřeních astrofyzikové na lodi zjistili, že hodnota Hubbleova parametru se po průchodu červí dírou změnila na $H = (57 \pm 4)\,\mathrm{km\cdot s^{-1}\cdot Mpc^{-1}}$.

d) Vhodným výpočtem ověřte, že naměřené údaje jsou konzistentní s tvrzením, že loď se stále nalézá v našem vesmíru a pouze se posunula v čase.

Pokud se loď stále nachází v našem vesmíru, můžeme hodnotu Hubblova parametru spočítat nezávisle ze znalosti T. Je-li současná hustota látky ve vesmíru rovna $\rho_0 = \rho_{\mathrm{m},0} + \rho_{\Lambda,0}$ (kde $\rho_{\mathrm{m},0}$, resp. $\rho_{\Lambda,0}$ jsme označili současné hodnoty hustoty hmoty – temné a baryonové, resp. temné energie), bude hustota ρ látky ve vesmíru při škálovém faktoru a rovna $\rho = \rho_{\mathrm{m},0}\,a^{-3} + \rho_{\Lambda,0}$. Dále použijeme informaci o plochosti vesmíru a s použitím napovězeného vzorce pro kritickou hustotu získáme vztah

$$H = H_0\sqrt{\frac{\rho_{\mathrm{m},0}\,a^{-3} + \rho_{\Lambda,0}}{\rho_{\mathrm{m},0} + \rho_{\Lambda,0}}} = H_0\sqrt{\frac{1 + a^{-3}x_{\mathrm{m}\Lambda,0}}{1 + x_{\mathrm{m}\Lambda,0}}}\,,$$

kde ze zadání víme, že $x_{\mathrm{m}\Lambda,0} \equiv \rho_{\mathrm{m},0}/\rho_{\Lambda,0} = 28/72 \doteq 0{,}39$. Dostáváme $H \approx 0{,}85 H_0$, a tedy $H \doteq 58\,\mathrm{km\cdot s^{-1}\cdot Mpc^{-1}}$, což je konzistentní s naměřenou hodnotou. Není tedy vyloučeno, že loď se skutečně nalézá v našem vesmíru a pouze se posunula v čase do budoucnosti.

e) Vypočtěte, o kolik let se loď v čase posunula.

Nápověda: Ve vesmíru, ve kterém převažuje temná energie, se vzdálenosti zvětšují s faktorem e^{Ht}.

Použijeme přiblížení, že ve vesmíru dominuje temná energie. Čas, který odpovídá škálovému faktoru $a = 9$, tedy můžeme dobře aproximovat jako $t = t_0 + (1/H_0)\ln a$. Číselně dostaneme $t - t_0 \doteq 32\cdot 10^9$ let. Kdybychom počítali exaktně (s použitím ΛCDM modelu a diferenciálního počtu), dostali bychom hodnotu $27\cdot 10^9$ let.

C Trojhvězda

(max. 20 bodů)

Uvažujme trojný gravitačně vázaný systém, který se skládá z těsného páru hvězd obíhajících po kruhových drahách ve vzájemné vzdálenosti a a z testovacího tělíska zanedbatelné hmotnosti, které obíhá centrální pár po kruhové dráze ve velmi velké vzdálenosti $\rho \gg a$. Pro přehlednost výpočtů uvažujme, že hvězdy centrálního páru mají identické hmotnosti $M_1 = M_2 = M$. Pro hmotnost μ testovacího tělíska potom platí $\mu \ll M$.

V této úloze se pokusíme vyřešit, jakým způsobem je pohyb testovacího tělíska ovlivňován centrální dvojhvězdou. Předpokládejte, že oběžné dráhy obou složek centrálního páru i testovacího tělíska leží v jedné rovině. Neuvažujte efekty gravitace testovacího tělíska na pohyb centrálního páru ani relativistické efekty. Bude se vám hodit, že pro $|\varepsilon| \ll 1$ můžeme psát *binomickou aproximaci* $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon + \frac{1}{2}n(n-1)\varepsilon^2$. To znamená, že například pro $a \ll \rho$ platí

$$(a+\rho)^{-3} \approx \rho^{-3}\left(1 - 3\frac{a}{\rho} + 6\frac{a^2}{\rho^2}\right).$$

Úhel, který svírá spojnice barycentra a hvězdy M_1 se spojnicí barycentra a tělíska μ, nazveme θ (měříme ho od hvězdy M_1 směrem k tělísku).

a) S jakou periodou P_c a frekvencí Ω_c obíhá centrální pár? Výsledky vyjádřete obecně pomocí G, M, a.

Krajské kolo 2018/19, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Z 3. Keplerova zákona získáme

$$\frac{P_c^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_1+M_2)} = \frac{2\pi^2}{GM},$$

kde G je Newtonova gravitační konstanta. Máme tedy $P_c = \sqrt{2\pi^2 a^3/GM}$. Protože $\Omega_c = 2\pi/P_c$, můžeme psát

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{2GM}{a^3}}.$$

b) Užitím binomické aproximace ukažte, že pro vzdálenosti L_1, resp. L_2 mezi testovacím tělískem a hvězdou M_1, resp. M_2 platí

$$L_{1,2} \approx \rho\left(1 \mp \frac{a}{2\rho}\cos\theta + \frac{1}{8}\frac{a^2}{\rho^2}\sin^2\theta\right).$$

Zanedbejte v konečném výsledku všechny členy, jež obsahují vyšší než druhé mocniny a/ρ.

K určení vzdáleností $L_{1,2}$ použijeme kosinovou větu ve tvaru $L_{1,2}^2 = \rho^2 \mp \rho a\cos\theta + \frac{1}{4}a^2$. Pomocí aproximace $(1+\varepsilon)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\varepsilon - \frac{1}{8}\varepsilon^2$ získáme

$$L_{1,2} = \rho\sqrt{1 \mp \frac{a}{\rho}\cos\theta + \frac{1}{4}\frac{a^2}{\rho^2}} \approx \rho\left(1 \mp \frac{a}{2\rho}\cos\theta + \frac{1}{8}\frac{a^2}{\rho^2}\sin^2\theta\right).$$

c) Určete velikost složky gravitační síly, kterou působí centrální dvojhvězda na testovací tělísko, podél spojnice testovací tělísko–barycentrum. Vyjádřete řešení ve tvaru

$$F_r \approx \frac{2GM\mu}{\rho^2}\left(1 + \frac{a^2}{\rho^2}f(\theta)\right),$$

kde $f(\theta)$ je funkcí pouze úhlu θ. Použijte stejnou aproximaci jako v předchozím bodě a v konečném výsledku zanedbejte členy s vyššími než druhými mocninami a/ρ.

Celková velikost gravitační síly, kterou působí hvězda M_1 na testovací tělísko, je $GM\mu/L_1^2$. Vzhledem k tomu, že tato síla působí pod úhlem ke směru k barycentru, musíme uvažovat pouze její podélnou složku. Ta je v poměru $(\rho - \frac{a}{2}\cos\theta)/L_1$ k celkové síle. Pro hvězdu M_2 je celková velikost síly $GM\mu/L_2^2$ a její podélná složka je k ní v poměru $(\rho + \frac{a}{2}\cos\theta)/L_2$. Celková složka síly ve směru k barycentru je tedy rovna

$$F_r = G\mu\left(\frac{M}{L_1^2}\frac{\rho - \frac{a}{2}\cos\theta}{L_1} + \frac{M}{L_2^2}\frac{\rho + \frac{a}{2}\cos\theta}{L_2}\right).$$

Nyní si vyjádříme $L_{1,2}^{-3}$ pomocí aproximace výše. Dostáváme

$$L_{1,2}^{-3} \approx \rho^{-3}\left[1 \pm \frac{3a}{2\rho}\cos\theta + \left(6\cos^2\theta - \frac{3}{2}\sin^2\theta\right)\frac{a^2}{4\rho^2}\right].$$

Po dosazení do vztahu pro F_r a algebraických úpravách získáme

$$F_r \approx \frac{2GM\mu}{\rho^2}\left[1 + \frac{a^2}{4\rho^2}\left(3\cos^2\theta - \frac{3}{2}\sin^2\theta\right)\right].$$

Pro funkci $f(\theta)$ tedy dostáváme $f(\theta) = \frac{3}{4}(\cos^2\theta - \frac{1}{2}\sin^2\theta)$.

Krajské kolo 2018/19, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

d) Vyjádřete funkci $f(\theta)$ ve tvaru $f(\theta) = \alpha + \beta \cos 2\theta$. Určete číselné hodnoty parametrů α a β. *Nápověda:* $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$.

Dostáváme $f(\theta) = \frac{3}{16}(1 + 3\cos 2\theta)$, a tedy $\alpha = 3/16$ a $\beta = 9/16$.

Díky tomu, že oběžná perioda centrálního páru je velmi krátká ve srovnání s oběžnou periodou testovacího tělíska, a tomu, že průměrná hodnota $\langle \cos 2\theta \rangle = 0$, můžeme pro průměrnou velikost přitažlivé síly působící na testovací tělísko psát

$$\frac{2GM\mu}{\rho^2}\left(1 + \alpha\,\frac{a^2}{\rho^2}\right).$$

e) Určete periodu p a úhlovou frekvenci ω oběhu testovacího tělíska kolem dvojhvězdy ve vzdálenosti ρ od barycentra. Výsledek vyjádřete pomocí G, M, a, ρ a α. Použijte binomickou aproximaci. Porovnejte tyto výrazy s periodou p_0 a úhlovou frekvencí ω_0, kterou bychom získali, pokud by centrálním tělesem nebyla dvojhvězda, ale jen jediná hvězda o hmotnosti $2M$ nacházející se v barycentru.

Použijeme rovnováhu mezi odstředivou a přitažlivou silou v neinerciální vztažné soustavě, která rotuje spolu s testovacím tělískem. Máme

$$\omega^2\rho\mu = \frac{2GM\mu}{\rho^2}\left(1 + \alpha\,\frac{a^2}{\rho^2}\right).$$

Z toho plyne, že

$$\omega = \sqrt{\frac{2GM}{\rho^3}}\left(1 + \alpha\,\frac{a^2}{\rho^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\frac{2GM}{\rho^3}}\left(1 + \frac{\alpha}{2}\frac{a^2}{\rho^2}\right).$$

Pokud by v barycentru byla jediná hvězda o hmotnosti $2M$, získali bychom jednoduše $\omega_0 = \sqrt{2GM/\rho^3}$.

Pro periodu p dostáváme

$$p = \sqrt{\frac{2\pi^2\rho^3}{GM}}\left(1 + \alpha\,\frac{a^2}{\rho^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\frac{2\pi^2\rho^3}{GM}}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\frac{a^2}{\rho^2}\right),$$

kde můžeme identifikovat $p_0 = \sqrt{2\pi^2\rho^3/GM}$. Odtud plyne, že

$$\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1 + \frac{\alpha}{2}\frac{a^2}{\rho^2}, \qquad \frac{p}{p_0} \approx 1 - \frac{\alpha}{2}\frac{a^2}{\rho^2}.$$

Jelikož máme $\alpha = 3/16 > 0$, způsobí dvojhvězda ve středu systému efektivní zesílení přitažlivé síly v porovnání s jedinou hvězdou stejné celkové hmotnosti. Důsledkem je, že při stejném poloměru ρ oběžné dráhy testovacího tělíska pozorujeme kratší oběžnou periodu.

Krajské kolo 2018/19, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

D Neznámý objekt (praktická)

(max. 30 bodů)

V první části této úlohy využijete předpřipravenou tabulku v MS Excel k numerickému výpočtu dráhových elementů neznámého objektu na základě zadaných dat z pozorování. Můžete předpokládat, že objekt obíhá Zemi po dráze pod vlivem Newtonových zákonů. V druhé části provedete vlastní pozorování jiných objektů podobného druhu.

Dva pozorovatelé na zemském rovníku vybavení radary zpozorovali 22. října 2018 v čase t_0 neznámý objekt O. Pozorovatel A měl v počátečním čase t_0 objekt O právě nad svým západním bodem ve výšce $h_0 = 15{,}8°$ nad obzorem. Pozorovatel B měl v počátečním čase t_0 objekt O právě ve svém zenitu. Pozorovatel B zároveň svým modernějším radarem změřil radiální rychlost objektu O, která byla v čase t_0 nulová. Vzdálenost mezi pozorovateli A a B činí $l = 1\,481{,}2\,\mathrm{km}$ (měřeno podél zemského povrchu). Po uplynutí doby $\Delta T = 176{,}12\,\mathrm{s}$, tj. v čase $t_1 = t_0 + \Delta T$, vystoupal objekt O do zenitu pozorovatele A. Označme Z střed Země a S, resp. P střed, resp. perigeum oběžné dráhy objektu.

K numerickému výpočtu parametrů oběžné dráhy objektu O využijte přiložený soubor MS Excel [1]. Základní schéma výpočtu je následující: hlavními vstupy jsou výše uvedené hodnoty a rovněž odhad oběžné periody T. Pro tyto údaje tabulka dopočte ostatní parametry dráhy a následně Newtonovou metodou [2] vyřeší Keplerovu rovnici $E - e \sin E = 2\pi t/T$, kde e je numerická excentricita dráhy, E je úhel od polopřímky SP k SO a t je čas od průchodu perigeem. Odtud tabulka dopočte úhel, který průvodič objektu opsal mezi okamžiky t_0 a t_1. Ten ovšem můžeme spočítat nezávisle z podmínek zadání výše. Rozdíl těchto dvou hodnot nám dává kritérium přesnosti počátečního odhadu T.

a) Do vzorců tabulky byly vneseny chyby (červeně označené buňky). Opravte tyto vzorce a určete následující parametry dráhy objektu: periodu, velkou poloosu, numerickou excentricitu a inklinaci.

> Níže uvádíme podrobný popis výpočtu, nyní pouze stručně shrňme správné řešení. Chyby ve vzorcích jsou následující. V buňce F2 jsme v čitateli i jmenovateli zlomku zaměnili cos za sin. V buňce F3 místo třetí odmocniny počítáme druhou odmocninu. Numerický výpočet poté dává $T \doteq 38\,077\,\mathrm{s}$, $a \doteq 24\,458\,\mathrm{km}$, $e \doteq 0{,}712\,8$. Inklinace je zřejmě nulová.

b) S využitím databáze [3] určete, o jaký objekt se jednalo. Určete jeho číslo v katalogu NORAD a případné další zajímavé informace. Záznamy v databázi [3] podléhají formátu TLE [4].

> Jedná se o objekt NORAD č. 33 208. Ve skutečnosti jde o stupeň rakety, která na oběžnou dráhu vynesla komunikační satelit EchoStar XI.

Nyní provedete vlastní pozorování přeletu několika umělých objektů, které obíhají Zemi. K vyhledání potřebných dat o přeletech využijte portál Heavens Above [5]. Čísla NORAD objektů, které budete pozorovat, jsou následující: 23 561, 25 544, 27 386 a 38 770.

c) Ke každému z objektů vyhledejte informace o jeho názvu, druhu a orbitě. Pro alespoň dva objekty odpozorujte alespoň jeden přelet. Zapište datum, pozorovaný čas začátku a konce přeletu a souhvězdí, kterými objekt proletěl. Odhadněte minimální hvězdnou velikost dosaženou během přeletu.

> Informace o objektech jsou shrnuty v následující tabulce (epocha 25. října 2018).

d) Je možné z území České republiky pouhým okem pozorovat přelety objektu O? Zdůvodněte.

č. NORAD	název	druh	perioda / s	velká poloosa / km	excentricita	inklinace / deg
23 561	Ariane 4	3. stupeň rakety	6 010	7 144	0,000 6	98,8
25 544	ISS	orbitální stanice	5 560	6 784	0,000 4	51,6
27 386	Envisat	environmentální družice	6 010	7 143	0,000 1	98,2
38 770	Atlas V	stupeň typu Centaur	5 770	6 954	0,017 7	64,7

Přelety je sice možné pozorovat, ale jejich typická hvězdná velikost se pohybuje okolo hodnoty 10 mag. Naproti tomu z rovníku lze přelety objektu O skutečně pozorovat i pouhým okem.

[1] http://olympiada.astro.cz/zadani/AO_2018_19_2_AB_prakticka.xlsx
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Newton%27s_method
[3] https://www.space-track.org
[4] https://en.wikipedia.org/wiki/Two-line_element_set
[5] https://www.heavens-above.com

Zde uvádíme podrobný popis numerického výpočtu dráhových elementů neznámého objektu O. Neznámý objekt O se pohybuje v rovině zemského rovníku, inklinace jeho oběžné dráhy je tedy nulová. Označme Z střed Země a S střed oběžné dráhy objektu O. Ze sinové věty pro trojúhelník ZOA v čase t_0 plyne pro počáteční vzdálenost r_0 objektu O od středu Země (R_Z značíme poloměr Země)

$$\frac{r_0}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+h_0\right)} = \frac{R_Z}{\sin\left(\pi - \frac{l}{R_Z} - (\frac{\pi}{2}+h_0)\right)} \implies r_0 = \frac{\cos h_0}{\cos\left(\frac{l}{R_Z}+h_0\right)} R_Z\,.$$

Označme T (neznámou) oběžnou dobu objektu O. Z 3. Keplerova zákona plyne (M_Z je hmotnost Země)

$$a = \sqrt[3]{\frac{GM_ZT^2}{4\pi^2}}\,.$$

Protože radiální rychlost objektu O vůči pozorovateli B je v čase t_0 nulová, je objekt O v čase t_0 v perigeu nebo apogeu. Pro lineární excentricitu jeho dráhy tudíž platí

$$ea = |a - r_0|\,,$$

kde e je numerická excentricita oběžné dráhy objektu O. Označme ještě $b = a\sqrt{1-e^2}$ délku malé poloosy oběžné dráhy objektu O.

Označme φ_{SO} úhel průvodiče SO v čase t_1. Úhlem průvodiče XY zde obecně myslíme úhel B_0XY, kde B_0 je poloha pozorovatele B v čase t_0. Transformací souřadnic pak získáme úhel průvodiče φ_{ZO} v čase t_1.

Nyní rozlišíme následující dva případy:

(i) $r_0 < a$, tj. objekt O je v čase t_0 v perigeu,

(ii) $r_0 > a$, tj. objekt O je v čase t_0 v apogeu.

Krajské kolo 2018/19, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

V případě (i) platí pro excentrickou anomálii $E = \varphi_{\mathsf{SO}}$ v čase t_1 Keplerova rovnice ve tvaru

$$E - e\sin E = \frac{2\pi}{T}\Delta T \Rightarrow \varphi_{\mathsf{SO}} - e\sin\varphi_{\mathsf{SO}} = 2\pi\frac{\Delta T}{T}\,. \tag{1}$$

Pro úhel φ_{ZO} v tomto případě platí

$$\operatorname{tg}\varphi_{\mathsf{ZO}} = \frac{a\cos\varphi_{\mathsf{SO}} - b}{ea\sin\varphi_{\mathsf{SO}}}\,. \tag{2}$$

V případě (ii) platí pro excentrickou anomálii $E = \pi + \varphi_{\mathsf{SO}}$ v čase t_1 Keplerova rovnice ve tvaru

$$E - e\sin E = \frac{2\pi}{T}\left(\frac{T}{2} + \Delta T\right) \Rightarrow \varphi_{\mathsf{SO}} + e\sin\varphi_{\mathsf{SO}} = 2\pi\frac{\Delta T}{T}\,. \tag{3}$$

Pro úhel φ_{ZO} v tomto případě platí

$$\operatorname{tg}\varphi_{\mathsf{ZO}} = \frac{(a\cos\varphi_{\mathsf{SO}} + b)}{ea\sin\varphi_{\mathsf{SO}}}\,. \tag{4}$$

Pro úhel φ_{ZA} průvodiče ZA v čase t_1 platí s ohledem na podmínky úlohy

$$\varphi_{\mathsf{ZA}} = \frac{l}{R_{\mathsf{Z}}} + 2\pi\frac{\Delta T}{T_{\mathsf{Z}}}\,, \tag{5}$$

kde T_{Z} je délka siderického dne na Zemi.

Protože objekt O vystoupal v čase t_1 do zenitu pozorovatele A, platí $\varphi_{\mathsf{ZA}} = \varphi_{\mathsf{ZO}}$.

Pro určení periody T a dalších parametrů oběžné dráhy objektu O postupujeme takto

1. Pro zvolený počáteční odhad T vypočteme r_0 a a.
2. Numericky (Newtonovou metodou) řešíme rovnici (1), resp. (3), čímž určíme přibližnou hodnotu φ_{SO}.
3. Vypočteme φ_{ZO} podle (2), resp. (4), dále φ_{ZA} podle (5) a ověříme, zda je rozdíl $|\varphi_{\mathsf{ZO}} - \varphi_{\mathsf{ZA}}|$ dostatečně malý. Jinak upravíme odhad oběžné doby T, příp. odhad hodnoty φ_{SO}, ze které jsme iterovali Newtonovou metodou, a celý postup opakujeme.

Autorem přehledového testu A je Tomáš Gráf. Autorem příkladu B je Martin Blaschke a Jakub Vošmera, příklad C vytvořil Stanislav Fořt, praktickou úlohu D navrhl Martin Raszyk.