

**Finále 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení
Analýza dat****Úlohy****G Baade & Wesselink vs. ℓ Car***(max. 40 bodů)*

Jako cefeidy označujeme třídu radiálně pulzujících pravidelných proměnných hvězd, které vykazují empirický vztah mezi periodou a absolutní hvězdnou velikostí. V případě tzv. klasických cefeid, ke kterým řadíme i prototypickou proměnnou δ Cep, můžeme tento vztah reprezentovat jako

$$\overline{M}_V = a(\log \frac{P}{d} - 1) + b, \quad (\heartsuit)$$

kde P označuje periodu pulzací a \overline{M}_V střední absolutní hvězdnou velikost ve filtru V. Za pomoci dat cefeid se známou vzdáleností (změřenou nezávislými metodami) můžeme zjistit číselné hodnoty koeficientů a, b jako¹ $a = (-2,73 \pm 0,07)$ mag a $b = (-3,97 \pm 0,03)$ mag.

Cílem této úlohy bude ilustrovat tzv. Baadeovu-Wesselinkovu metodu² určení vzdálenosti cefeid. Jak uvidíme v úkolech níže, tato metoda využívá jednak spektroskopická měření radiálních rychlostí fotosféry k určení závislosti lineární rychlosti pulsace na čase, a také fotometrická popř. interferometrická měření k určení změn úhlového průměru disku cefeidy. Kombinací těchto informací dostáváme způsob určení vzdálenosti cefeid, který není závislý na znalosti vztahu (\heartsuit) mezi periodou a zářivým výkonem. V této úloze BW metodu aplikujeme na určení vzdálenosti jedné konkrétní galaktické cefeidy, což nám poslouží k následné validaci vztahu (\heartsuit).

Proměnná hvězda ℓ Carinae je se střední pozorovanou hvězdnou velikostí $\overline{V} = 3,75$ mag nejjasnější cefeidou na obloze. Její poměrně velká perioda pulzací $P = 35,560$ d navíc dle vztahu (\heartsuit) znamená relativně velký zářivý výkon a tedy i velký poloměr. Můžeme tedy říct, že úhlová velikost ℓ Car na obloze činí z této hvězdy ideálního kandidáta na interferometrické měření závislosti úhlového průměru disku na fázi³ periody pulzace. Toto měření bylo skutečně provedeno pomocí přístroje VINCI instalovaného na interferometru VLTI Evropské jižní observatoře. Data⁴ z tohoto měření máte k dispozici v tabulce 1.

a) Vyneste do grafu naměřenou závislost úhlového průměru θ (v mas neboli v tisícinách úhlové vteřiny) na fázi. Graf nakreslete dostatečně velký, budete do něho později vynášet další body. K reprezentaci datových bodů použijte křížky (\times). Chybové úsečky vykreslovat nemusíte.

Viz obrázek 2. Závislost úhlové velikosti θ cefeidy ℓ Car získaná interferometricky je vyobrazena pomocí křížků.

Interferometrická měření závislosti úhlové velikosti na čase jsou bohužel k dispozici pouze pro relativně malé množství nejbližších cefeid. Alternativně můžeme tuto závislost získat pomocí vztahu

¹Storm et al., *Astronomy & Astrophysics*, A95 (534), 2011

²Walter Baade, *Astronomische Nachrichten*, 228 (359), 1926 a Adriaan Jan Wesselink, *Bulletin of the Astronomical Institutes of the Netherlands*, 10 (91), 1946

³K popisu časových závislostí vlastností pravidelných proměnných hvězd zavádíme (bezrozměrnou) fázi, která během jedné periody rovnoměrně roste z hodnoty 0 na hodnotu 1.

⁴Kervella et al., *Astronomy & Astrophysics*, 3 (416), 2004

Finále 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Tabulka 1: Data z měření úhlového průměru θ hvězdy ℓ Car pomocí interferometru VLTI Evropské jižní observatoře (opraveno o efekt okrajového ztemnění).

JD	fáze	$\frac{\theta}{\text{mas}}$	JD	fáze	$\frac{\theta}{\text{mas}}$
2452453,498	0,618	$3,054 \pm 0,113$	2452749,576	0,947	$2,645 \pm 0,078$
2452739,564	0,665	$2,891 \pm 0,087$	2452751,579	0,003	$2,753 \pm 0,033$
2452740,569	0,693	$2,989 \pm 0,047$	2452755,617	0,117	$2,970 \pm 0,113$
2452741,717	0,726	$2,993 \pm 0,039$	2452763,555	0,340	$3,194 \pm 0,034$
2452742,712	0,754	$2,899 \pm 0,056$	2452765,555	0,396	$3,212 \pm 0,034$
2452743,698	0,781	$2,758 \pm 0,076$	2452766,550	0,424	$3,210 \pm 0,035$
2452744,634	0,808	$2,794 \pm 0,035$	2452768,566	0,481	$3,188 \pm 0,037$
2452745,629	0,836	$2,675 \pm 0,098$	2452770,535	0,536	$3,160 \pm 0,022$
2452746,620	0,864	$2,775 \pm 0,046$	2452771,528	0,564	$3,136 \pm 0,020$
2452747,599	0,891	$2,699 \pm 0,129$	2452786,620	0,989	$2,727 \pm 0,064$

mezi plošnou jasností a barvou hvězdy. Ten lze motivovat následovně: zanedbáme-li extinkci, lze zářivý tok Φ od hvězdy ve vzdálenosti d , poloměru R a teplotě T vyjádřit jako

$$\Phi = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{4\pi d^2} = \frac{1}{4} \theta^2 \sigma T^4.$$

Plošný zářivý tok $4\Phi/(\pi\theta^2)$ je pak roven $(\sigma/\pi)T^4$ a je tedy dán čistě teplotou, neboli barvou hvězdy. V praxi je tento postup zatížen komplikacemi spojenými se započítáním extinkce, měřením v konkrétním fotometrickém filtru a odchylkami spektra hvězdy od Planckovy křivky. V naší analýze využijeme následující empirický vztah⁵

$$-0,4V_0 - 2 \log \frac{\theta}{\text{mas}} = -0,5344(V - K)_0 - 1,0708 \quad (1)$$

mezi vlastním barevným indexem $(V - K)_0$ ve filtrech V a K, vlastní hvězdnou velikostí V_0 ve filtru V a úhlovým průměrem θ . Veličiny $(V - K)_0$ a V_0 vztahujeme přímo ke hvězdě, není do nich tedy započítána extinkce. Pravá strana vztahu (1) určuje barvu hvězdy ve filtrech V a K, zatímco levou stranu můžeme identifikovat jako logaritmus světelného toku ve filtru V na jednotku úhlové plochy disku hvězdy.

Pro hvězdu ℓ Car byl naměřen barevný exces $E(B - V) = 0,17$ mag. Zároveň uvažujte, že pro extinkce $A_V = V - V_0$ a $A_K = K - K_0$ ve filtrech V a K platí

$$A_V = 3,3E(B - V),$$

$$A_K = 0,3E(B - V).$$

b) Určete hodnotu barevného excesu $E(V - K) = (V - K) - (V - K)_0$ pro hvězdu ℓ Car.

Dostaneme

$$E(V - K) = A_V - A_K = 3,0E(B - V) \doteq 0,51 \text{ mag}.$$

c) Přepište vztah (1) jako závislost mezi pozorovaným barevným indexem $(V - K)$ hvězdy ℓ Car, její pozorovanou hvězdnou velikostí V a úhlovým průměrem θ .

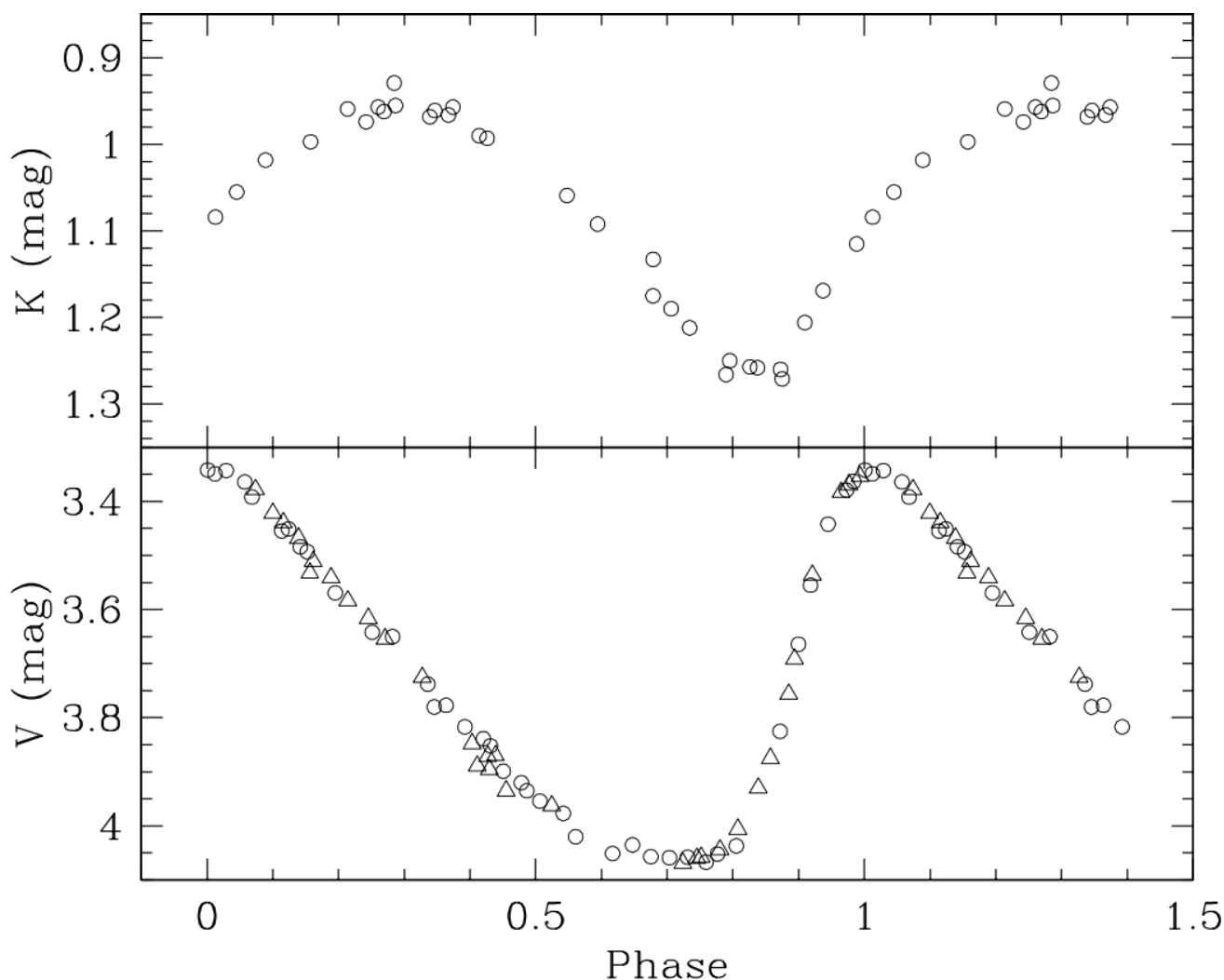
⁵P. Fouqué, W. P. Gieren, *Astronomy & Astrophysics*, 799 (320), 1997

Finále 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Dosažením výsledků $(V - K)_0 = (V - K) - E(V - K) = (V - K) - 0,51$ a $V_0 = V - A_V = V - 3,3E(B - V) = V - 0,56$ dostaneme vztah

$$-0,4V - 2 \log \frac{\theta}{\text{mas}} = -0,5344(V - K) - 1,02224. \quad (2)$$

Na obr. 1 máme k dispozici sfázované světelné křivky⁶ cefeidy ℓ Car ve filtrech V a K.



Obrázek 1: Fotometrie cefeidy ℓ Car ve viditelné a blízké infračervené oblasti.

d) Vyberte 20 vhodných hodnot fáze, pro které z obr. 1 odečtete hodnoty V a K . Pro každou hodnotu fáze vypočtete pomocí vztahu mezi barvou a plošnou jasností odpovídající úhlový průměr ℓ Car.

Vybereme například 20 hodnot fáze, které jsou rovnoměrně rozloženy v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$. Pro získání hodnot veličin V a K v těchto bodech musíme jejich závislost na fázi vhodně interpolovat. Výsledky odečtů a následného dosazení do vztahu (2) vidíme v tabulce 2.

⁶J. W. Pel, *Astronomy & Astrophysics Suppl. Ser.*, 413 (24), 1976 a D. Bersier, *Astrophysical Journal Suppl.* 465 (140), 2002 pro filtr V, C. D. Laney, R. S. Stobie, *Astronomy & Astrophysics Suppl. Ser.*, 93 (93), 1992 pro filtr K.

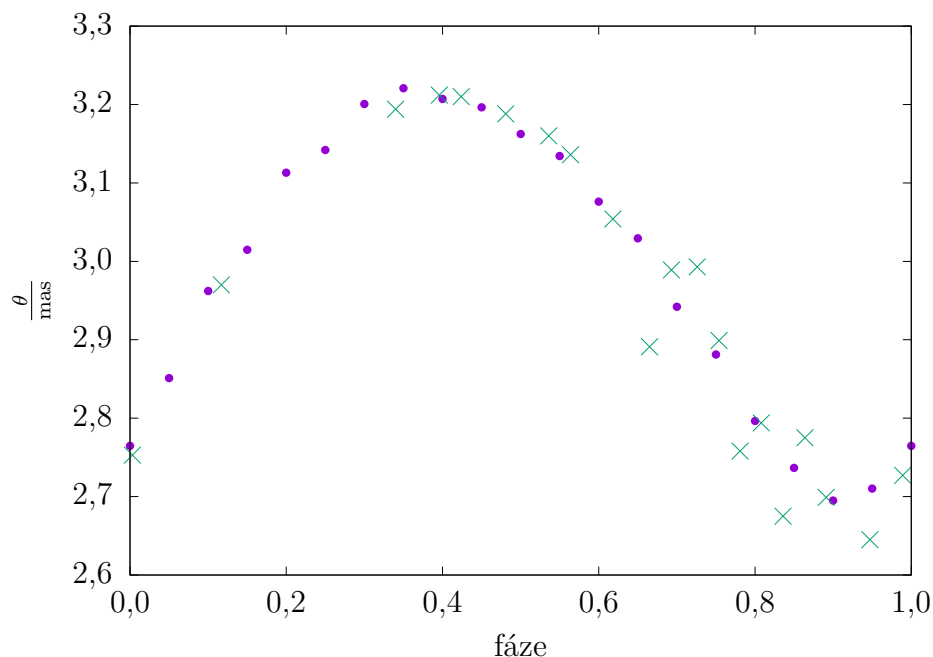
Finále 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Tabulka 2: Hodnoty pozorovaných hvězdných velikostí V a K odečtené pro vybrané hodnoty fáze. Rovněž hodnoty θ dopočtené pomocí vztahu (2).

fáze	$\frac{V}{\text{mag}}$	$\frac{K}{\text{mag}}$	$\frac{\theta}{\text{mas}}$	fáze	$\frac{V}{\text{mag}}$	$\frac{K}{\text{mag}}$	$\frac{\theta}{\text{mas}}$
0,00	3,34	1,100	2,765	0,50	3,95	1,035	3,162
0,05	3,36	1,055	2,851	0,55	4,00	1,062	3,134
0,10	3,42	1,008	2,962	0,60	4,03	1,100	3,076
0,15	3,49	0,997	3,015	0,65	4,05	1,130	3,029
0,20	3,57	0,965	3,113	0,70	4,06	1,180	2,942
0,25	3,63	0,965	3,142	0,75	4,06	1,214	2,881
0,30	3,69	0,950	3,201	0,80	4,03	1,255	2,796
0,35	3,77	0,960	3,221	0,85	3,91	1,260	2,737
0,40	3,83	0,982	3,207	0,90	3,66	1,222	2,695
0,45	3,90	1,005	3,196	0,95	3,43	1,155	2,710

e) Do stejného grafu jako v části a) vynesete závislost úhlového průměru θ (kterou jste získali fotometricky v úloze d)) na fázi. Tentokrát k reprezentaci datových bodů použijte tečky (\bullet). Komentujte míru shody s interferometrickými daty.

Graf s vynesenu závislostí úhlové velikosti θ cefeidy ℓ Car na fázi vidíme na obr. 2. Závislost získaná pomocí vztahu mezi plošnou jasností a barvou je vyobrazena pomocí teček. Vidíme, že je ve velmi dobré shodě se závislostí získanou pomocí interferometrie.



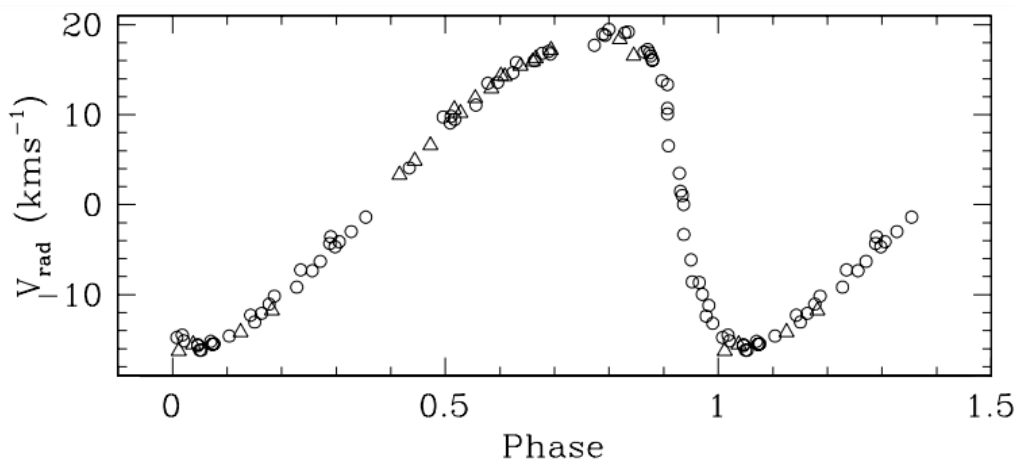
Obrázek 2: Výsledky úloh a) a e): závislost úhlového průměru θ cefeidy ℓ Car na fázi získaná pomocí interferometrie (křížky \times) a nezávisle pomocí vztahu mezi plošnou jasností a barvou (tečky \bullet).

f) Určete maximální hodnotu θ_{\max} a minimální hodnotu θ_{\min} úhlového průměru ℓ Car. Odhadněte jejich nejistoty.

Finále 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Z grafu na obr. 2 odečteme $\theta_{\max} = (3,22 \pm 0,01)$ mas a $\theta_{\min} = (2,70 \pm 0,05)$ mas.

Zbývající ingrediencí Baadeovy-Wesselinkovy metody je závislost rychlosti v_p radiálních pulzací na čase. Na obr. 3 vidíme změřenou závislost⁷ radiálních rychlostí v_{rad} na fázi, která byla určena na základě analýzy posunu středních poloh spektrálních čar ℓ Car oproti laboratorním hodnotám. Vertikální posun křivky na obr. 3 nebude v následujícím důležitý.



Obrázek 3: Spektroskopické měření radiálních rychlostí ℓ Car (sfázováno s interferometrickými a fotometrickými daty v tab. 1 a na obr. 1).

g) Určete amplitudu Δv_{rad} naměřené radiální rychlosti (tj. rozdíl mezi maximální a minimální hodnotou radiální rychlosti). Odhadněte její nejistotu.

Z grafu na obr. 3 odečteme $\Delta v_{\text{rad}} \doteq (35 \pm 1) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Amplitudu Δv_{rad} ovšem nemůžeme přímo identifikovat s amplitudou Δv_p rychlostí radiální pulzace cefeidy: spektroskopická metoda měří radiální rychlost zprůměrovanou přes celý disk hvězdy, zatímco amplituda Δv_p je přímo rovná měřené amplitudě radiální rychlosti fotosféry pouze lokálně v okolí středu disku. Uvážíme-li pro jednoduchost spektrální čáru, jejíž intenzita má v laboratorní soustavě ideálně úzký profil lokalizovaný na laboratorní vlnové délce λ_0 , můžeme ukázat, že v důsledku radiálních pulzací získá intenzita této čáry ve spektru, které průměrujeme přes celý disk, trojúhelníkový profil (v případě $v_p > 0$)

$$j(\lambda) \sim \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 & \text{pro } \lambda \in \langle \lambda_0, \lambda_0(1 + \frac{v_p}{c}) \rangle, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

(podobně pro $v_p < 0$). Uvážením vztahu pro polohu těžiště trojúhelníku tedy dostáváme pro vlnovou délku $\bar{\lambda}$ střední polohy čáry vztah

$$\bar{\lambda} = \lambda_0 \left(1 + \frac{2 v_p}{3 c} \right). \quad (3)$$

h) Určete projekční poměr $p_0 = \Delta v_p / \Delta v_{\text{rad}}$. Uvažujte pouze výše popsany geometrický příspěvek, zanedbejte okrajové ztemnění a další efekty.

⁷D. Bersier, *Astrophysical Journal Suppl.* 465 (140), 2002 a M. M. Taylor et al., *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 662 (292), 1997

Finále 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Z Dopplerova vztahu můžeme pro amplitudu Δv_{rad} psát

$$\Delta v_{\text{rad}} = c \frac{\Delta \bar{\lambda}}{\lambda_0} = \frac{2}{3} \Delta v_p,$$

odkud dostáváme $p_0 = \frac{3}{2} = 1,5$.

Ve skutečnosti je projekční poměr $p = \Delta v_p / \Delta v_{\text{rad}}$ ovlivněn nejen geometrií pulzace a okrajovým ztemněním, ale i dalšími charakteristikami hvězdné atmosféry a gradienty rychlosti proudění ve fotosféře. Ve zbytku analýzy můžete použít empirický vztah⁸

$$p = (1,38 \pm 0,02) - (0,06 \pm 0,02) \log \frac{P}{\text{d}}, \quad (4)$$

i) Určete hodnotu projekčního poměru p pro ℓ Car. Vypočtete Δv_p v $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$. Oba výsledky uveďte včetně nejistot.

Dosazením za $P = 35,560$ d získáme $p \doteq (1,29 \pm 0,04)$, a tudíž $\Delta v_p = p \Delta v_{\text{rad}} \doteq (45 \pm 2) \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. Nejistoty jsme dopočetli podle Gaussova zákona šíření chyb

$$\sigma_p = \sqrt{(0,02)^2 + (0,02 \log \frac{P}{\text{d}})^2}$$

a

$$\frac{\sigma_{\Delta v_p}}{\Delta v_p} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_p}{p}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta v_{\text{rad}}}}{\Delta v_{\text{rad}}}\right)^2}.$$

Pro konečné určení vzdálenosti cefeidy potřebujeme určit odpovídající amplitudu $\Delta \omega_p$ rychlosti změn úhlového průměru θ . Tu můžeme odečíst jako rozdíl směrnic tečen ke grafu θ v závislosti na čase v bodech s maximálním a minimálním sklonem (kde sklon klesající funkce je záporný). Dle grafu na obr. 3 by se mělo jednat o body poblíž hodnot fáze 0,05 a 0,80.

j) Grafem θ v závislosti na fázi, který jste získali v částech a) a e), proložte dvě přímky v okolí bodů, kde závislost nabývá maximálního a minimálního sklonu. Pro získání plného počtu bodů z této části použijte metodu nejmenších čtverců a zaznamenejte do řešení hodnoty parametrů $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ regrese (viz níže). Proložení „od oka“ bude hodnoceno maximálně polovičním počtem bodů a stejně tak regrese bez postupu pomocí chytré kalkulačky. Směrnice přímků určete včetně nejistot (které můžete pouze odhadnout). Odpovídající přímky vynesete do stejného grafu jako v částech a) a e).

Metoda nejmenších čtverců: prokládáme-li daty (x_i, y_i) pro $i = 1, \dots, N$ přímkou $y_i = \alpha + \beta x_i$ (kde hodnoty x_i vynášíme na osu x a hodnoty y_i vynášíme na osu y), potom střední hodnoty $\bar{\beta}, \bar{\alpha}$ parametrů β, α této přímky zjistíme pomocí vztahů

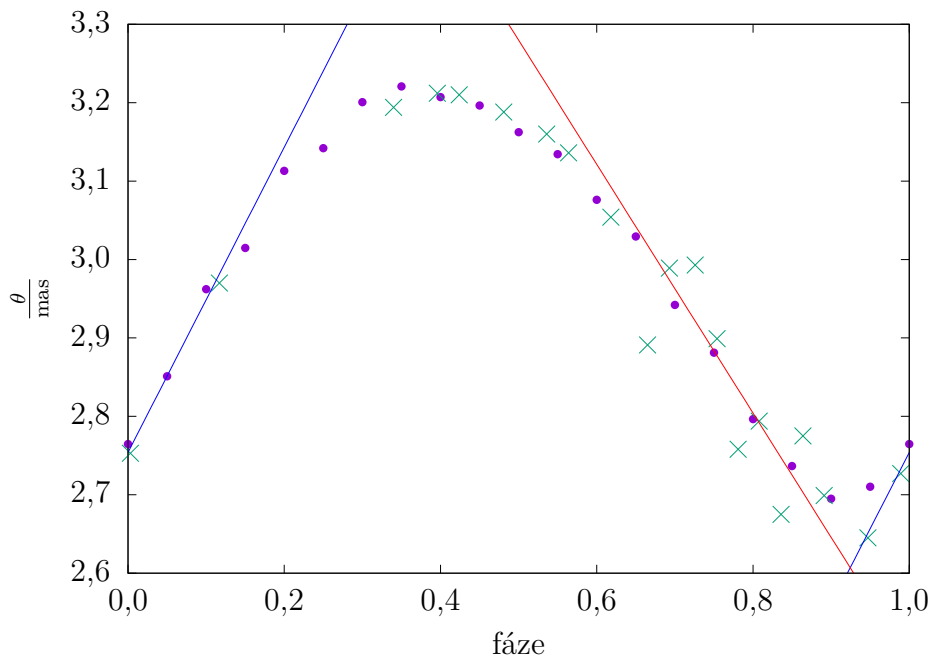
$$\bar{\beta} = \frac{N\sigma_{xy} - \sigma_x\sigma_y}{N\sigma_{xx} - \sigma_x^2} \quad \text{a} \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{N} (\sigma_y - \bar{\beta}\sigma_x),$$

kde $\sigma_x = \sum_i x_i, \sigma_y = \sum_i y_i, \sigma_{xy} = \sum_i x_i y_i, \sigma_{xx} = \sum_i x_i^2$ a $\sigma_{yy} = \sum_i y_i^2$.

Proložíme-li přímkou datovými body v okolí fáze 0,05, dostáváme metodou nejmenších čtverců směrnici $\bar{\beta}_{0,05} \doteq (1,95 \pm 0,09) \text{ mas}$ a intercept $\bar{\alpha}_{0,05} \doteq (2,75 \pm 0,01) \text{ mas}$. Pro okolí fáze 0,80 dostáváme směrnici $\bar{\beta}_{0,80} \doteq (-1,59 \pm 0,32) \text{ mas}$ a intercept $\bar{\alpha}_{0,80} \doteq (4,07 \pm 0,26) \text{ mas}$. Graf θ v závislosti na fázi s proloženými přímkami maximálního a minimálního sklonu vidíme na obr. 4.

⁸N. Nardetto, *Astronomy & Astrophysics*, 661 (471), 2007

Finále 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 4: Proložení přímek místy, kde má závislost θ na fázi maximální sklon (modrá) a minimální sklon (červená).

k) Určete amplitudu $\Delta\omega_p$ rychlosti změn úhlového průměru θ hvězdy ℓ Car a její nejistotu. Výsledek uveďte v $\text{mas} \cdot \text{d}^{-1}$.

Dostáváme

$$\Delta\omega_p = \frac{\bar{\beta}_{0,05} - \bar{\beta}_{0,80}}{P} \doteq (0,0996 \pm 0,0093) \text{ mas} \cdot \text{d}^{-1}.$$

Nejistotu jsme určili jako

$$\sigma_{\Delta\omega_p} = \frac{1}{P} \sqrt{(\sigma_{\bar{\beta}_{0,05}})^2 + (\sigma_{\bar{\beta}_{0,80}})^2}.$$

l) Určete vzdálenost d cefeidy ℓ Car v pc. Porovnejte s hodnotou (504 ± 28) pc, která plyne z měření paralaxy družicí Gaia.⁹ Určete rovněž hodnoty R_{\max} a R_{\min} (v násobcích R_{\odot}) maximálního a minimálního poloměru hvězdy během pulzačního cyklu.

Dostáváme (nesmíme zapomenout na faktor 2 převádějící úhlový průměr na poloměr)

$$d = \frac{2\Delta v_p}{\Delta\omega_p} \doteq (520 \pm 50) \text{ pc},$$

což je v dobré shodě s výsledky družice Gaia. Rovněž dostáváme

$$R_{\max} = \frac{1}{2}\theta_{\max}d \doteq (180 \pm 20)R_{\odot},$$

$$R_{\min} = \frac{1}{2}\theta_{\min}d \doteq (150 \pm 20)R_{\odot}.$$

⁹Gaia Collaboration, *Astronomy & Astrophysics*, A1 (649), 2021 (Gaia Early Data Release 3)



Finále 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Nejistoty jsme dopočetli podle Gaussova zákona šíření chyb jako

$$\frac{\sigma_d}{d} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{\Delta v_p}}{\Delta v_p}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{\Delta \omega_p}}{\Delta \omega_p}\right)^2}$$

a

$$\frac{\sigma_R}{R} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_d}{d}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\theta}{\theta}\right)^2}.$$

m) Ověřte platnost vztahu (♡) mezi periodou a absolutní hvězdnou velikostí klasických cefeid: vypočtete střední absolutní hvězdnou velikost \overline{M}_V cefeidy ℓ Car jednak pomocí vztahu (♡) a jednak pomocí vzdálenosti d určené v části l), včetně nejistot. Pro výpočet použijte hodnotu střední pozorované hvězdné velikosti $\overline{V} = 3,75$ mag hvězdy ℓ Car ve filtru V.

Pro střední absolutní hvězdnou velikost můžeme z Pogsonovy rovnice pomocí pozorované střední hvězdné velikosti \overline{V} a vzdálenosti d psát

$$\overline{M}_V = \overline{V} + 5 - 5 \log \frac{d}{\text{pc}} - A_V = \overline{V} + 5 - 5 \log \frac{d}{\text{pc}} - 3,3E(B - V),$$

a tedy

$$\overline{M}_V \doteq (-5,41 \pm 0,20) \text{ mag}.$$

Ze vztahu mezi periodou a zářivým výkonem dostaneme

$$\overline{M}_V = a(\log \frac{P}{\text{d}} - 1) + b \doteq (-5,47 \pm 0,11) \text{ mag},$$

kde absolutní nejistotu $\sigma_{\overline{M}_V}$ v určení \overline{M}_V jsme spočetli pomocí Gaussova zákona šíření chyb jako

$$\sigma_{\overline{M}_V} = \sqrt{(\log \frac{P}{\text{d}} \sigma_a)^2 + (\sigma_b)^2}.$$

Dostáváme tedy velmi dobrou shodu.