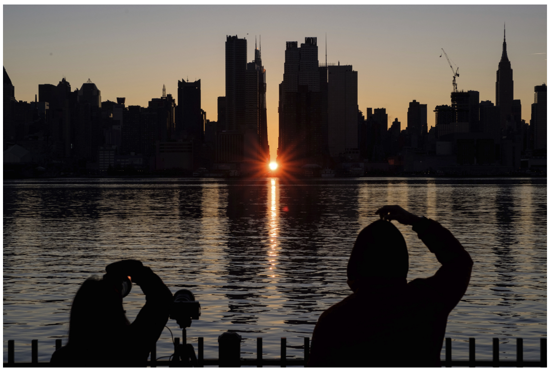
Astronomická olympiáda | Slezská univerzita, Fyzikální ústav v Opavě | Česká astronomická společnost, www.astro.cz, olympiada.astro.cz

Finále 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení
Teoretická část
Krátké úlohy

A Manhattanhenge

(max. 10 bodů)

Ulice Manhattenu jsou uspořádány do pravoúhlé mříže: Avenues a na ně kolmé Streets. 1. prosince 2023 ráno se místním (a turistům) naskytl zajímavý úkaz: pozorovali východ Slunce přesně mezi domy Streets. Viz také obrázek 1. Určete azimut směru, kterým jsou Streets orientovány. V jaké další dny během roku můžeme pozorovat Slunce během východu a západu v ose New Yorských ulic? Zeměpisná šířka New York City je $\phi_{\rm NYC} = 40°44'$, podzimní rovnodennost v roce 2023 nastala 23. září. Uvažujte pro jednoduchost, že se Slunce po ekliptice pohybuje rovnoměrně a zanedbejte atmosférickou refrakci u horizontu.



Obrázek 1: Východ Slunce v New Yorku.

Spočteme nejdříve deklinaci Slunce 1. prosince 2023. V daný den uplynulo od podzimní rovnodennosti 69 dní. Jeho ekliptikální délka tedy je

$$\lambda_\odot = 180° + \frac{69}{365{,}25} \cdot 360° \doteq 248° ,$$

zatímco ekliptikální šířka je $\beta_\odot = 0°$. Dále můžeme ve sférickém trojúhelníku Severní světový pól – Severní ekliptikální pól – Slunce psát kosinovou větu ve tvaru

$$\cos(90° - \delta_\odot) = \cos\varepsilon \cos(90° - \beta_\odot) + \sin\varepsilon \sin(90° - \beta_\odot) \cos(\lambda_\odot - 90°)$$

neboli

$$\sin\delta_\odot = \sin\varepsilon \sin\lambda_\odot .$$

Jako ε jsme označili sklon rotační osy Země vůči rovině ekliptiky. Číselně dostaneme $\delta_\odot \doteq -21°39'$. Nyní vypočítáme azimut $A_\odot$, na kterém pozorovatel v NYC Slunce pozoruje v okamžiku, kdy je jeho výška nad obzorem přesně nula. Ve sférickém trojúhelníku Severní světový pól – Zenit – Slunce můžeme psát kosinovou větu

$$\cos(90° - \delta_\odot) = \cos(90°) \cos(90° - \phi_{\rm NYC}) + \sin(90°) \sin(90° - \phi_{\rm NYC}) \cos A_\odot ,$$

neboli

$$\cos A_\odot = \frac{\sin \delta_\odot}{\cos \phi_{\mathrm{NYC}}} = \frac{\sin \varepsilon \sin \lambda_\odot}{\cos \phi_{\mathrm{NYC}}}\,.$$

Jelikož azimut východu Slunce musí ležet v intervalu $\langle 0°, 180° \rangle$, dostáváme jednoznačné řešení $A_\odot \doteq 119°$. To je v souladu s údajem na Wikipedii, kde se můžeme dočíst, že ulice New York City byly naprojektovány tak, aby se Streets odchylovaly o 29° od východo-západního směru.

Je zřejmé, že další podobný východ Slunce můžeme pozorovat 12. ledna (symetricky od zimního slunovratu 22. prosince). Podobně západ Slunce můžeme v ose Streets pozorovat symetricky od letního slunovratu 31. května a 12. července.

B Radiolokace

(max. 10 bodů)

V této úloze použijeme radioteleskop k detekci asteroidů. Mějme parabolickou anténu schopnou vysílat s výkonem $P = 10^5$ W, pozorující na vlnové délce $\lambda = 1$ m. Signál odražený od asteroidu detekujeme, pokud změříme výkon alespoň $P_\mathrm{m} = 10^{-15}$ W. Anténa je navíc směrová, vysílaný a zachycený signál bude zesílen ve směru pozorování o faktor

$$\gamma = \left(\frac{\pi D}{\lambda}\right)^2 ,$$

kde D je průměr antény, v našem případě $D = 10$ m. To znamená, že výkon bude γkrát silnější oproti anténě, která posílá/přijímá celý svůj výkon rovnoměrně do všech směrů. Jaká může být maximální vzdálenost d asteroidu s plochou průřezu $S = 10\,\mathrm{m}^2$ a albedem $A = 0{,}5$, aby jej bylo možné radioteleskopem detekovat? Předpokládejte, že záření odražené od asteroidu se šíří izotropně do všech směrů.

Tok u tělesa bude

$$\Phi = \frac{\gamma P}{4\pi d^2}\,.$$

Asteroid odrazí výkon

$$P_\mathrm{A} = \frac{\gamma P S A}{4\pi d^2}\,.$$

Na anténě zachytíme výkon

$$P_\mathrm{T} = \frac{\gamma^2 P S A D^2}{64\pi d^4}\,.$$

Nezapomeňme, že při detekci signálu dojde ke druhému zesílení faktorem γ. Limitní vzdálenost můžeme vyjádřit pomocí mezního výkonu P_m

$$d = \sqrt[4]{\frac{\gamma^2 P S A D^2}{64\pi P_\mathrm{m}}} = \frac{1}{\lambda}\sqrt[4]{\frac{\pi^3 P S A D^6}{64 P_\mathrm{m}}} \doteq 4\,000\,\mathrm{km}\,.$$

Finále 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

C Blaauw kick

(max. 10 bodů)

V naší Galaxii se vyskytují samostatné hvězdy s velmi vysokými rychlostmi, které mohou překračovat i samotnou únikovou rychlost Mléčné dráhy. Důvodem urychlení těchto hvězd může být proces, při němž v binárním systému jedna z hvězd vybuchne jako supernova. V této úloze se tento proces pokusíme popsat.

Uvažujte binární systém s hvězdami o hmotnostech M a m, které obíhají po kruhových drahách kolem společného hmotného středu. První hvězda náhle exploduje jako supernova a tím se její hmotnost sníží o ΔM. Předpokládejte, že exploze je okamžitá a že nebude tlakem odhazovaných plynů ovlivňovat dráhu druhé hvězdy. Uvažujte také, že exploze je sféricky symetrická (a proto nedojde k urychlení explodující hvězdy) a že odhazovaná hmota nebude gravitačně působit na druhou hvězdu.

a) Nejprve uvažujte, že hmotnost m můžeme zanedbat (tj. $m \ll M$). Určete, jakou minimální část hmotnosti systému dvojhvězdy musí supernova odhodit, tedy poměr $\Delta M/M$, aby došlo ke gravitačnímu rozpoutání systému.

Jelikož uvažujeme, že $m \ll M$, můžeme tvrdit, že v soustavě spojené s hmotnější hvězdou obíhá druhá, méně hmotná, hvězda rychlostí o velikosti

$$v \approx \sqrt{\frac{GM}{R}}\,.$$

Po explozi označme novou hmotnost první hvězdy jako $M^* = M - \Delta M$. Víme, že se v během exploze nezmění a můžeme ji tedy porovnat s únikovou rychlostí ze systému. Pro tu platí

$$v \approx \sqrt{\frac{2GM^*}{R}}\,.$$

Porovnáme-li oba vztahy, dostaneme

$$\frac{1}{2} = \frac{M^*}{M} = \frac{M - \Delta M}{M} = 1 - \frac{\Delta M}{M}\,,$$

a tedy

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{1}{2}\,.$$

b) Určete poměr $\Delta M/(M+m)$ potřebný pro rozpad systému pro obecné hmotnosti M a m.

Nápověda: část b) může být výhodné řešit uvážením redukované hmotnosti $\mu = Mm/(M+m)$.

Řešení pomocí redukované hmotnosti: Použijeme postup, ve kterém si obecný problém dvou těles můžeme ztransformovat na problém pohybu testovací částice o hmotnosti μ v centrálním gravitačním poli, které je generované nehybným tělesem o hmotnosti $\mathcal{M}$. V termínech parametrů původního systému dvou hvězd píšeme

$$\mathcal{M} = M + m\,,$$
$$\mu = \frac{Mm}{M+m}\,.$$

$\mathcal{M}$ je tedy celková hmotnost obou hvězd a μ je redukovaná hmotnost. Jako d si označíme vzájemnou vzdálenost složek. V tomto obraze budou kinetická i potenciální energie, perioda oběhu a vzájemná vzdálenost stejné jako příslušné parametry binárního systému v soustavě spojené s hmotným středem dvojhvězdy. Toho využijeme pro určení celkové mechanické energie systému před explozí

$$E_{\mathrm{pre}} = -\frac{G\mathcal{M}\mu}{2d} = \frac{1}{2}\mu u^2 - \frac{G\mathcal{M}\mu}{d},$$

kde u je relativní rychlost hvězd před explozí. Platí $\mu\mathcal{M} = Mm$, takže

$$E_{\mathrm{pre}} = -\frac{GMm}{2d} = -\frac{1}{2}\mu u^2\,,$$

a tedy

$$u^2 = \frac{G(M+m)}{d}\,.$$

Po explozi bude energie systému v soustavě spojené s novým hmotným středem rovna

$$E_{\mathrm{post}} = -\frac{GM^*m}{2a} = \frac{1}{2}\mu^* u^2 - \frac{GM^*m}{d}\,,$$

kde a označuje velikost hlavní poloosy dráhy testovacího tělesa a μ^* je redukovaná hmotnost po explozi. Aby hvězda unikla ze systému, musí být $a \to \infty$, a proto $E_{\mathrm{post}} \to 0$. Úpravami získáme

$$u^2 = \frac{2G(M^*+m)}{d}\,.$$

Konečně porovnáním výrazů pro u^2 dostaneme

$$\frac{G(M+m)}{d} = \frac{2G(M^*+m)}{d}\,,$$
$$M + m = 2(M - \Delta M + m)\,,$$

a tedy

$$\frac{\Delta M}{M+m} = \frac{1}{2}\,,$$

což je v režimu $m \ll M$ v souladu s výsledkem první části.

(Alternativní) řešení ve vztažné soustavě hmotného středu před explozí: Úhlová rychlost ω oběhu soustavy před výbuchem splňuje

$$\omega = \sqrt{\frac{G(M+m)}{d^3}}\,,$$

kde $d = R + r$ a R je vzdálenost hmotnější složky od hmotného středu, zatímco r je vzdálenost méně hmotné složky od hmotného středu. Platí $MR = mr$ a tedy

$$R = \frac{m}{M+m}d\,,$$
$$r = \frac{M}{M+m}d\,.$$

Finále 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Odtud dostáváme kruhové rychlosti obou složek před výbuchem v soustavě spojené s hmotným středem jako

$$V = \omega R = \sqrt{\frac{G(M+m)}{R+r}}\frac{m}{M+m}\,,$$
$$v = \omega r = \sqrt{\frac{G(M+m)}{R+r}}\frac{M}{M+m}\,.$$

Relativní rychlost složek tedy můžeme zapsat jako

$$u = V + v = \sqrt{\frac{G(M+m)}{R+r}}\,.$$

Po explozi bude celková mechanická energie v této soustavě rovna

$$\frac{1}{2}M^*V^2 + \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GM^*m}{R+r}\,.$$

Není již ale pravda, že hmotný střed systému je v této soustavě nehybný: pohybuje se totiž rychlostí o velikosti

$$\frac{mv - M^*V}{M^*+m} = \frac{\Delta MV}{M^*+m} \neq 0\,.$$

Gravitační vazebnou energii systému po výbuchu získáme odečtením kinetické energie

$$\frac{1}{2}(M^*+m)\left(\frac{mv - M^*V}{M^*+m}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{(mv - M^*V)^2}{M^*+m}$$

posuvného pohybu hmotného středu od celkové mechanické energie. Ma-li dojít k rozpadu systému, musí být splněna podmínka nulovosti gravitační vazebné energie. Máme pak

$$\begin{aligned}0 &= \frac{1}{2}M^*V^2 + \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}\frac{(mv - M^*V)^2}{M^*+m} - \frac{GM^*m}{R+r}\\ &= \frac{1}{2}M^*V^2\left(1 - \frac{M^*}{M^*+m}\right) + \frac{1}{2}mv^2\left(1 - \frac{m}{M^*+m}\right) + \frac{mM^*}{m+M^*}vV - \frac{GM^*m}{R+r}\\ &= \frac{1}{2}\frac{mM^*}{m+M^*}(V+v)^2 - \frac{GM^*m}{R+r}\,.\end{aligned}$$

Musí tedy platit

$$u = V + v = \sqrt{\frac{2G(M^*+m)}{R+r}}\,.$$

Porovnáním vztahů pro u opět dostaneme výsledek

$$\frac{\Delta M}{M+m} = \frac{1}{2}\,.$$

Finále 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

D Doba mikrovlnná

(max. 10 bodů)

Kosmické mikrovlnné pozadí (CMB) je pozůstatkem raného vesmíru. Vzniklo v momentě, kdy teplota poklesla natolik, že se hmota stala pro fotony průhlednou. Od té doby fotony putují volně vesmírem. Toto záření má spektrum absolutně černého tělesa o jisté teplotě. Jak se vesmír rozpínal, záření chladlo a jeho současná teplota je $T_0 = 2{,}73\,\mathrm{K}$. Vlnová délka odpovídající maximu Planckovského spektra tedy leží v mikrovlnné oblasti.

Pro jednoduchost předpokládejte, že vesmír je dominovaný hmotou, tedy že škálový faktor a závisí na čase t jako $a(t) \propto t^{2/3}$. Můžete rovněž předpokládat, že současné stáří vesmíru je $t_0 = 13{,}8 \cdot 10^9$ let. Jestliže mikrovlnná oblast odpovídá rozsahu vlnových délek 1 mm až 1 m, určete

a) staří vesmíru, v jakém reliktní záření začalo, resp. přestane být mikrovlnné, tzn. určete čas t_{start}, resp. t_{end},

Teplota T je spjata s vlnovou délkou λ maxima vyzařování absolutně černého tělesa vztahem

$$T = \frac{b}{\lambda}\,,$$

kde $b = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mm \cdot K}$. Vlnovým délkám $\lambda_1 = 1\,\mathrm{mm}$ a $\lambda_2 = 1\,\mathrm{m}$ tak odpovídají teploty $T_1 = 2{,}9\,\mathrm{K}$ a $T_2 = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}$.

Ve vesmíru dominovaném hmotou je škálový faktor a závislý na času t podle vztahu

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{2/3}.$$

Zároveň platí

$$\frac{a(t)}{a(t_0)} = \frac{\lambda}{\lambda_0}\,,$$

což po zkombinování dá

$$t = t_0 \left(\frac{T_0}{T}\right)^{3/2},$$

kde $t_0 = 13{,}8 \cdot 10^9$ let. Dostáváme tedy

$$t_{\mathrm{start}} = t_0 \left(\frac{T_0}{T_1}\right)^{3/2} \doteq 12{,}6 \cdot 10^9\,\mathrm{let}\,,$$

$$t_{\mathrm{end}} = t_0 \left(\frac{T_0}{T_2}\right)^{3/2} \doteq 399 \cdot 10^{12}\,\mathrm{let}\,.$$

b) jakému červenému posuvu z_{start} odpovídá čas t_{start}.

Platí

$$1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{T}{T_0}\,,$$

z čehož plyne

$$z_{\mathrm{start}} = -1 + \frac{T_1}{T_0} \doteq 0{,}063\,.$$

Finále 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení
Dlouhé úlohy

E Nerozlučná dvojice

(max. 20 bodů)

Jak jistě víte, Měsíc má vzhledem k Zemi vázanou rotaci. Pokud zanedbáme librace, vidíme tedy pořád pouze tu samou polovinu měsíčního povrchu. Kvůli působení slapových sil se navíc Měsíc postupně vzdaluje a zemská rotace se zpomaluje. Za nějakou dobu tak bude také Země nastavovat k Měsíci stále stejnou polokouli. V této úloze se budeme zabývat parametry tohoto úplně vázaného systému.

Začněme současným stavem systému Země – Měsíc. Uvažujte pouze rotaci Země kolem její osy a oběh Měsíce kolem Země. Pro jednoduchost předpokládejte, že středem soustavy je zemský střed, dráha Měsíce je přesně kruhová, Měsíc je bodový a vše se odehrává v jedné rovině. Moment setrvačnosti Země označme jako J_E, současnou úhlovou rychlost rotace Země jako ω_E, současný moment setrvačnosti Měsíce vzhledem k zemské ose jako J_M a současnou úhlovou rychlost oběhu Měsíce jako ω_M. V koncovém, úplně vázaném stavu bude moment setrvačnosti Měsíce vzhledem k Zemi roven J'_M a koncová úhlová rychlost rotace Země a oběhu Měsíce bude $\omega' = \omega'_\mathrm{E} = \omega'_\mathrm{M}$.

a) Zapište rovnicí zákon zachování momentu hybnosti pro systém (pomocí $J_\mathrm{E}, J_\mathrm{M}, J'_\mathrm{M}, \omega_\mathrm{E}, \omega_\mathrm{M}, \omega'$).

Celkový současný moment hybnosti L systému bude součtem momentu hybnosti Země a momentu hybnosti Měsíce vzhledem k Zemi. Moment hybnosti obecně je součinem momentu setrvačnosti a úhlové rychlosti, pro náš systém tedy

$$L = J_\mathrm{E}\omega_\mathrm{E} + J_\mathrm{M}\omega_\mathrm{M} \,.$$

Analogicky můžeme pro moment hybnosti L' v koncovém stavu psát

$$L' = J_\mathrm{E}\omega'_\mathrm{E} + J'_\mathrm{M}\omega'_\mathrm{M} = J_\mathrm{E}\omega' + J'_\mathrm{M}\omega' = (J_\mathrm{E} + J'_\mathrm{M})\omega' \,.$$

Moment hybnosti se zachovává, tj. musí být stejný v počátečním a koncovém stavu. Tedy $L = L'$ neboli

$$J_\mathrm{E}\omega_\mathrm{E} + J_\mathrm{M}\omega_\mathrm{M} = (J_\mathrm{E} + J'_\mathrm{M})\omega' \,.$$

b) Vyjádřete koncovou vzdálenost Země – Měsíc r' pomocí ω', G a M_E. Uvažujte, že hmotnost Měsíce je zanedbatelná oproti hmotnosti Země.

Jednoduše přímo z 3. Keplerova zákona vyjádříme

$$r' = \left(\frac{GM_\mathrm{E}}{\omega'^2}\right)^{1/3} .$$

c) Vyjádřete r' pomocí G, M_E, M_M, ω_E, ω_M, J_E a J_M. Pro jednoduchost v zákoně zachování hybnosti zanedbejte příspěvek momentu hybnosti odpovídající rotaci Země v koncovém stavu. Předpokládejte, že Měsíc je hmotný bod, pro jehož moment setrvačnosti lze obecně psát $J_\mathrm{HB} = MR^2$, kde M je hmotnost hmotného bodu a R vzdálenost od středu, kolem kterého obíhá.

Vezmeme výsledek předchozí části a za ω' dosadíme ze zákona zachování hybnosti, s tím, že zanedbáme příspěvek rotace Země ke koncovému momentu hybnosti, tedy

$$\omega' = \frac{J_\mathrm{E}\omega_\mathrm{E} + J_\mathrm{M}\omega_\mathrm{M}}{J'_\mathrm{M}}\,.$$

Celkově tedy dostáváme

$$r' = \left[\frac{GM_\mathrm{E}J'^2_\mathrm{M}}{(J_\mathrm{E}\omega_\mathrm{E} + J_\mathrm{M}\omega_\mathrm{M})^2}\right]^{1/3}$$

a po dosazení za $J'_\mathrm{M} = M_\mathrm{M}r'^2$ máme

$$r'^3 = \frac{GM_\mathrm{E}M_\mathrm{M}^2r'^4}{(J_\mathrm{E}\omega_\mathrm{E} + J_\mathrm{M}\omega_\mathrm{M})^2}$$

tedy

$$r' = \frac{(J_\mathrm{E}\omega_\mathrm{E} + J_\mathrm{M}\omega_\mathrm{M})^2}{GM_\mathrm{E}M_\mathrm{M}^2}\,.$$

d) S využitím obecných výsledků předchozích částí nyní spočítejte číselné hodnoty koncové vzdálenosti r' Země – Měsíc (v kilometrech) a koncové periody rotace Země a oběhu Měsíce T' (ve dnech). Moment setrvačnosti Země aproximujte momentem setrvačnosti tuhé rotující koule, pro nějž platí $J_\mathrm{koule} = \frac{2}{5}MR^2$, kde M je hmotnost a R poloměr, a moment setrvačnosti Měsíce opět momentem setrvačnosti hmotného bodu obíhajícího kolem středu. Uvažujte, že $r = 384\,400\,\mathrm{km}$.

V tabulkách si najdeme hodnoty G, M_E, M_M, R_E, r, T_E a T_M, pomocí nichž už můžeme dopočítat všechny relevantní veličiny potřebné pro výpočet, jako například $\omega_\mathrm{E} = 2\pi/T_\mathrm{E}$, $\omega_\mathrm{M} = 2\pi/T_\mathrm{M}$, $J_\mathrm{E} = \frac{2}{5}M_\mathrm{E}R_\mathrm{E}^2$ a $J_\mathrm{M} = M_\mathrm{M}r^2$. Po dosazení do

$$r' = \frac{(J_\mathrm{E}\omega_\mathrm{E} + J_\mathrm{M}\omega_\mathrm{M})^2}{GM_\mathrm{E}M_\mathrm{M}^2} = \frac{\left(\frac{2}{5}M_\mathrm{E}R_\mathrm{E}^2\frac{2\pi}{T_\mathrm{E}} + M_\mathrm{M}r^2\frac{2\pi}{T_\mathrm{M}}\right)^2}{GM_\mathrm{E}M_\mathrm{M}^2}$$

a

$$T' = \frac{2\pi J'_\mathrm{M}}{J_\mathrm{E}\omega_\mathrm{E} + J_\mathrm{M}\omega_\mathrm{M}} = \frac{2\pi M_\mathrm{M}r'^2}{J_\mathrm{E}\omega_\mathrm{E} + J_\mathrm{M}\omega_\mathrm{M}} = \frac{2\pi M_\mathrm{M}(J_\mathrm{E}\omega_\mathrm{E} + J_\mathrm{M}\omega_\mathrm{M})^4}{G^2M_\mathrm{E}^2M_\mathrm{M}^4(J_\mathrm{E}\omega_\mathrm{E} + J_\mathrm{M}\omega_\mathrm{M})}$$

a tedy

$$T' = \frac{2\pi(\frac{2}{5}M_\mathrm{E}R_\mathrm{E}^2\frac{2\pi}{T_\mathrm{E}} + M_\mathrm{M}r^2\frac{2\pi}{T_\mathrm{M}})^3}{G^2M_\mathrm{E}^2M_\mathrm{M}^3}\,.$$

dostaneme číselně $r' \doteq 602\,000\,\mathrm{km} = 1{,}57r$ a $T' \doteq 54\,\mathrm{d} = 1{,}97T_\mathrm{M}$.

e) Vyjádřete celkovou mechanickou energii systému E v současném stavu (pomocí G, M_E, M_M, T_E, T_M, R_E a r) a celkovou mechanickou energii systému E' v koncovém stavu (pomocí G, M_E, M_M, T' a r'). Příspěvek rotační energie Země v koncovém stavu můžete zanedbat.

Celková mechanická energie je součtem kinetické a potenciální energie. Pro energii v současném stavu tedy můžeme psát

$$E = E_\mathrm{k} + E_\mathrm{p}\,.$$

Kinetická energie v soustavě spojené se Zemí je kinetická energie Měsíce a rotační energie Země

$$E_\mathrm{k} = E_\mathrm{k,M} + E_\mathrm{rot}\,,$$

kde

$$E_\mathrm{k,M} = \frac{1}{2}M_\mathrm{M}v_\mathrm{M}^2 = \frac{1}{2}M_\mathrm{M}\omega_\mathrm{M}^2r^2 = \frac{1}{2}M_\mathrm{M}v_\mathrm{M}^2 = \frac{1}{2}M_\mathrm{M}\left(\frac{2\pi}{T_\mathrm{M}}\right)^2r^2$$

a

$$E_\mathrm{rot} = \frac{1}{2}J_\mathrm{E}\omega_\mathrm{E}^2 = \frac{1}{2}\frac{2}{5}M_\mathrm{E}R_\mathrm{E}^2\omega_\mathrm{E}^2 = \frac{1}{5}M_\mathrm{E}R_\mathrm{E}^2\left(\frac{2\pi}{T_\mathrm{E}}\right)^2.$$

Pro potenciální energii můžeme psát

$$E_\mathrm{p} = -\frac{GM_\mathrm{E}M_\mathrm{M}}{r},$$

tedy celkově pro energii

$$E = \frac{1}{2}M_\mathrm{M}\left(\frac{2\pi}{T_\mathrm{M}}\right)^2r^2 - \frac{GM_\mathrm{E}M_\mathrm{M}}{r} + \frac{1}{5}M_\mathrm{E}R_\mathrm{E}^2\left(\frac{2\pi}{T_\mathrm{E}}\right)^2 = -\frac{GM_\mathrm{E}M_\mathrm{M}}{2r} + \frac{1}{5}M_\mathrm{E}R_\mathrm{E}^2\left(\frac{2\pi}{T_\mathrm{E}}\right)^2.$$

V koncovém stavu postupujeme obdobně, jen zanedbáme příspěvek rotační energie Země, tedy

$$E' = E'_\mathrm{k} + E'_\mathrm{p}\,,$$

kde

$$E'_\mathrm{k} = E'_\mathrm{k,M} = \frac{1}{2}M_\mathrm{M}(v'_\mathrm{M})^2 = \frac{1}{2}M_\mathrm{M}(\omega'_\mathrm{M})^2r'^2 = \frac{1}{2}M_\mathrm{M}\left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2r'^2$$

a

$$E'_\mathrm{p} = -\frac{GM_\mathrm{E}M_\mathrm{M}}{r'}\,.$$

Tedy celkově

$$E' = \frac{1}{2}M_\mathrm{M}\left(\frac{2\pi}{T'}\right)^2r'^2 - \frac{GM_\mathrm{E}M_\mathrm{M}}{r'} = -\frac{GM_\mathrm{E}M_\mathrm{M}}{2r'}\,.$$

f) Vypočtěte číselné hodnoty celkových mechanických energií E a E'. Jsou stejné? Proč ano / proč ne?

Dosadíme do odvozených vzorců pro E a E' a dostaneme $E \doteq 2{,}22\cdot10^{29}\,\mathrm{J}$ a $E' \doteq -2{,}40\cdot10^{28}\,\mathrm{J}$. Hodnoty E a E' tedy nemají stejnou hodnotu. Je to z toho důvodu, že v systému s časem dochází k disipaci energie na teplo při deformacích zemského tělesa, které Měsíc způsobuje.

Finále 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

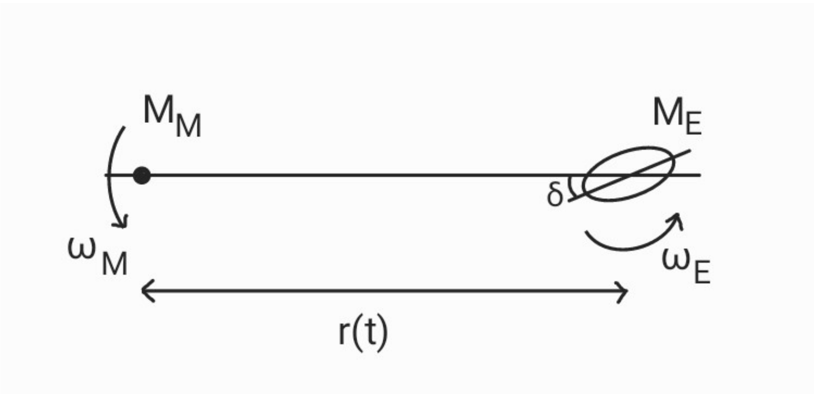
Zbývá určit časovou škálu, na níž k dosažení úplně vázaného stavu dojde. Nehomogenita gravitačního pole Měsíce způsobuje deformaci Země do tvaru protáhlého elipsoidu. Díky tření však osa tohoto protažení nemíří přímo k Měsíci: místo toho „předbíhá“ průvodič Měsíce o úhel δ, viz obrázek 2. Gravitační potenciál v poli takto zdeformované Země, který měříme v bodě se souřadnicemi (ρ, θ), kde ρ je vzdálenost od Země a θ je úhel od spojnice Země–Měsíc (omezujeme se na rovinu oběhu Měsíce kolem Země), můžeme přibližně zapsat jako

$$\Psi(\rho,\theta) \approx -\frac{GM_\mathrm{E}}{\rho} + \frac{\epsilon}{5}\frac{GM_\mathrm{E}}{\rho}\frac{R_\mathrm{E}^2}{\rho^2}\left[3\cos^2(\theta-\delta)-1\right],$$

kde ϵ je elipticita Země indukovaná slapovým působením Měsíce (poměr rozdílu minimálního a maximálního poloměru ku střednímu poloměru). Pro ni můžeme odvodit vztah

$$\epsilon = -\frac{15}{4}\frac{M_\mathrm{M}}{M_\mathrm{E}}\left[\frac{R_\mathrm{E}}{r(t)}\right]^3\frac{1}{1+\chi},$$

kde parametr χ je tzv. efektivní rigidita Země, což je bezrozměrná konstanta s hodnotou $\chi \approx 3{,}35$. Veličina $r(t)$ je vzdálenost Země–Měsíc v obecném čase t: označíme-li současnost jako $t = 0$, platí $r(0) = r$, a v koncovém čase t', kdy se ustaví úplně vázaná rotace, máme $r(t') = r'$.



Obrázek 2: Působení Měsíce na Zemi.

g) Aproximujte výraz $3\cos^2(\theta-\delta)-1$, vyskytující se ve vyjádření potenciálu, pro malé úhly θ. Tj. napište ho ve tvaru

$$3\cos^2(\theta-\delta)-1 = f(\delta) + \theta g(\delta) + \ldots$$

kde $f(\delta)$ a $g(\delta)$ jsou funkce, které určíte, a „$\ldots$“ označuje malé členy obsahující vyšší mocniny θ. S pomocí vašeho výsledku přepište vztah pro gravitační potenciál $\Psi(\rho,\theta)$ do tvaru

$$\Psi(\rho,\theta) \approx \Psi_0(\rho) - \theta\tau(\rho) + \ldots,$$

kde funkci $\tau(\rho)$ určete pomocí parametrů $G, M_\mathrm{E}, M_\mathrm{M}, R_\mathrm{E}, r(t), \chi$ a δ.

Nápověda: můžete využít součtové a další goniometrické vzorce a také standardní aproximace funkcí sinus a kosinus pro malé úhly $\sin\alpha \approx \alpha$, $\cos\alpha \approx 1$ pro $\alpha \ll 1$. Mimo jiné se vám může hodit, že $\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$.

Finále 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Za použití vzorce $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ přepíšeme výraz jako

$$3\cos^2(\theta-\delta) - 1 = 3\frac{1+\cos 2(\theta-\delta)}{2} - 1\,.$$

Dále použijeme součtový vzorec $\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x \sin y$, čímž dostaneme

$$\begin{aligned}3\cos^2(\theta-\delta) - 1 &= 3\frac{1+\cos 2\theta\cos 2\delta + \sin 2\theta \sin 2\delta}{2} - 1\\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2\theta\cos 2\delta + \frac{3}{2}\sin 2\theta\sin 2\delta\,.\end{aligned}$$

Víme, že pro malá θ, je $\cos\theta \approx 1$ a $\sin\theta \approx \theta$, tedy přibližně

$$3\cos^2(\theta-\delta) - 1 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2\delta + 3\theta\sin 2\delta,$$

tedy $f(\delta) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\cos 2\delta$ a $g(\delta) = 3\sin 2\delta$. Dosazením skutečně dostaneme

$$\Psi(\rho,\theta) = \Psi_0(\rho) - \theta\tau(\rho) + \ldots\,,$$

kde člen

$$\Psi_0(\rho) = -\frac{GM_\mathrm{E}}{\rho} - \frac{3}{4}\frac{GM_\mathrm{M}}{\rho}\left[\frac{R_\mathrm{E}}{r(t)}\right]^3 \frac{1}{1+\chi}\frac{R_\mathrm{E}^2}{\rho^2}\frac{1}{2}(1+3\cos 2\delta)\,,$$

který je konstantní v θ, pro další výpočty nebude důležitý. Pro koeficient $\tau(\rho)$ před $-\theta$ dostáváme

$$\tau(\rho) = \frac{9}{4}\frac{GM_\mathrm{M}R_\mathrm{E}^2\sin 2\delta}{(1+\chi)\rho^3}\left[\frac{R_\mathrm{E}}{r(t)}\right]^3\,.$$

Z obecných principů mechaniky vyplývá, že koeficient $\tau(\rho)$ před $-\theta$ v rozvoji potenciálu $\Psi(\rho,\theta)$ v mocninách θ, lze identifikovat s momentem síly, kterým gravitační pole deformované Země působí na těleso o jednotkové hmotnosti, které se nachází ve vzdálenosti ρ od Země a pro které je úhel θ nulový.[1]

h) Pomocí $G, M_\mathrm{M}, R_\mathrm{E}, \chi, r$ a δ napište vztah pro moment síly μ_M, kterým zemské gravitační pole v současnosti působí na Měsíc. Můžete uvažovat, že i úhel δ je malý.

Z předchozí části dosazením $\rho = r(0) = r$ a vynásobením hmotností Měsíce M_M dostaneme (s využitím aproximace $\sin 2\delta \approx 2\delta$ pro $\delta \ll 1$)

$$\mu_\mathrm{M} \approx \frac{9}{2}\frac{GM_\mathrm{M}^2\delta}{(1+\chi)R_E}\left(\frac{R_\mathrm{E}}{r}\right)^6.$$

i) Jaká je velikost momentu síly μ_E působícího v současnosti na Zemi (obecně pomocí μ_M)? Napište pro Zemi pohybovou rovnici (tj. analogii 2. Newtonova zákona pro točivý pohyb) pomocí výše odvozeného momentu síly μ_M působícího na Měsíc, M_E, R_E a úhlového zrychlení zemské rotace ε_E.

[1] Můžeme pozorovat analogii se situací, kdy na těleso o hmotnosti m umístěné v homogenním gravitačním poli s potenciálem tvaru $\Psi = gh$, kde h je výška, působí síla $F = -mg$.

Aby se zachovával moment hybnosti, musí být moment síly působící na Zemi stejně velký jako ten působící na Měsíc, ale opačného směru, tedy $\mu_\mathrm{E} = -\mu_\mathrm{M}$. Pohybová rovnice má mít význam 2. Newtonova zákona. V tom vystupují hmotnost, zrychlení a síla. Rozmyslíme si, že jejich protějšky pro rotační pohyb budou po řadě moment setrvačnosti, úhlové zrychlení a moment síly. Pomocí nich tedy napíšeme rotační obdobu klasického 2. Newtonova zákona pro posuvný pohyb ve tvaru

$$\mu_\mathrm{E} = -\mu_\mathrm{M} = J_\mathrm{E}\varepsilon_\mathrm{E} = \frac{2}{5}M_\mathrm{E}R_\mathrm{E}^2\varepsilon_E\,.$$

j) Odvoďte obecný vztah pro veličinu $\varepsilon_\mathrm{E}/\omega_\mathrm{E}$, tedy pro současnou relativní změnu úhlové rychlosti rotace Země. Pomocí ní vypočtěte číselně časovou škálu T, na níž by se ustavila úplně vázaná rotace. Výsledek udejte v rocích. Uvažujte, že $\delta \approx 3°$.

Zkombinováním výsledků dvou předchozích částí dostáváme

$$\frac{\varepsilon_\mathrm{E}}{\omega_\mathrm{E}} = -\frac{5}{2M_\mathrm{E}R_\mathrm{E}^2\omega_\mathrm{E}}\mu_\mathrm{M} = -\frac{5}{2M_\mathrm{E}R_\mathrm{E}^2\omega_\mathrm{E}}\frac{9}{2}\frac{GM_\mathrm{M}^2\delta}{(1+\chi)R_\mathrm{E}}\left(\frac{R_\mathrm{E}}{r}\right)^6 = -\frac{45}{4}\frac{GM_\mathrm{M}^2}{M_\mathrm{E}r^3\omega_\mathrm{E}}\frac{\delta}{1+\chi}\frac{R_\mathrm{E}^3}{r^3}.$$

Pomocí třetího Keplerova zákona $r^3\omega_\mathrm{M}^2 = GM_\mathrm{E}$, můžeme výsledek vyjádřit také ve tvaru

$$\frac{\varepsilon_\mathrm{E}}{\omega_\mathrm{E}} = -\frac{45}{4}\left(\frac{M_\mathrm{M}}{M_\mathrm{E}}\right)^2\frac{\omega_\mathrm{M}}{\omega_\mathrm{E}}\frac{\delta}{1+\chi}\left(\frac{R_\mathrm{E}}{r}\right)^3\omega_\mathrm{M}\,.$$

Číselně dostáváme $\varepsilon_\mathrm{E}/\omega_\mathrm{E} = -9{,}09\cdot 10^{-18}\,\mathrm{s}^{-1}$. Odhadovaná časová škála bude absolutní hodnota převrácené hodnoty $\varepsilon_\mathrm{E}/\omega_\mathrm{E}$, tedy $T = 3{,}49\cdot 10^9$ let, což je srovnatelné se současným stářím Země.

F Daisyworld

(max. 20 bodů)

Daisyworld je jednoduchý model ilustrující, jak biosféra může ovlivňovat a stabilizovat prostředí na planetě. Byl publikován v roce 1983 Jamesem Lovelockem a Andrewem Watsonem na podporu hypotézy Gaia[2] My se v této úloze jejich modelem inspirujeme a prozkoumáme vliv naší jednoduché biosféry na teplotu.

Na modelové planetě o poloměru R rostou dva druhy sedmikrásek (anglicky *daisy*), jeden s bílými květy a druhý s černými květy. Černý květ má ve viditelném světle albedo $a_\mathrm{c} = 0{,}00$ a bílý květ má albedo $a_\mathrm{b} = 1{,}00$. Povrch planety je pokryt půdou s albedem $a_\mathrm{p} = 0{,}50$. Oba druhy sedmikrásky rostou rovnoměrně po celém povrchu planety. Předpokládejte, že materiál planety dobře vede teplo, takže povrch planety má všude stejnou teplotu, nezávisle na úhlu, pod kterým na povrch dopadá záření od mateřské hvězdy. Skleníkový efekt na planetě je zanedbatelný, planeta vyzařuje na dlouhých infračervených vlnových délkách jako absolutně černé těleso. Uvažujte, že planeta obíhá hvězdu o zářivém výkonu L po kruhové dráze o poloměru r.

[2] J. E. Lovelock, A. J. Watson: *Biological homeostasis of the global environment: the parable of Daisyworld.* Tellus B: Chemical and Physical Meteorology, (1983)

Finále 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

a) Část povrchu f_c je pokryta černými sedmikráskami, část povrchu f_b bílými sedmikráskami a část povrchu f_p je holá. Platí $f_\mathrm{c} + f_\mathrm{b} + f_\mathrm{p} = 1$. Jaký zářivý výkon P_dopad dopadá na planetu? Jaký zářivý výkon P_in planeta pohltí? Výsledky vyjádřete pomocí veličin $L, R, r, f_\mathrm{c}, f_\mathrm{b}, f_\mathrm{p}, a_\mathrm{c}, a_\mathrm{b}, a_\mathrm{p}$.

Hvězda má zářivý výkon L. Intenzita záření dopadající na povrch planety ve vzdálenosti r od hvězdy je

$$I = \frac{L}{4\pi r^2}\,.$$

Účinný průřez planety je πR^2, kde R je poloměr planety. Na planetu tedy dopadá zářivý výkon

$$P_\mathrm{dopad} = I\pi R^2 = \frac{LR^2}{4r^2}\,.$$

Průměrné albedo planety je

$$a = f_\mathrm{b}a_\mathrm{b} + f_\mathrm{c}a_\mathrm{c} + f_\mathrm{p}a_\mathrm{p}\,.$$

Albedo a nám říká poměr odražené energie ku příchozí. Energie pohlcená planetou bude tudíž úměrná $1 - a$. Planeta od mateřské hvězdy pohltí výkon

$$P_\mathrm{in} = (1-a)I\pi R^2 = \frac{(1-a)LR^2}{4r^2} = \frac{(1 - f_\mathrm{b}a_\mathrm{b} - f_\mathrm{c}a_\mathrm{c} - f_\mathrm{p}a_\mathrm{p})LR^2}{4r^2}\,.$$

b) S pomocí výsledku předchozí podúlohy odvoďte vztah pro rovnovážnou teplotu T na planetě. Výsledek vyjádřete pomocí $r, f_\mathrm{c}, f_\mathrm{b}, f_\mathrm{p}, a_\mathrm{c}, a_\mathrm{b}, a_\mathrm{p}$, efektivní teploty T_* hvězdy a poloměru R_* hvězdy.

V rovnovážném stavu planeta vyzařuje stejný výkon, jako přijímá

$$P_\mathrm{out} = 4\pi R^2\sigma T^4 = P_\mathrm{in} = \frac{(1-a)LR^2}{4r^2}\,.$$

Z toho můžeme vyjádřit rovnovážnou teplotu planety

$$T = \sqrt[4]{\frac{(1-a)L}{16\pi\sigma r^2}} = \frac{1}{2}\sqrt[4]{\frac{(1 - f_\mathrm{b}a_\mathrm{b} - f_\mathrm{c}a_\mathrm{c} - f_\mathrm{p}a_\mathrm{p})L}{\pi\sigma r^2}}\,. \tag{1}$$

Pokud zářivý výkon hvězdy $L = 4\pi R_*^2\sigma T_*^2$ vyjádříme pomocí jejího poloměru R_* a teploty T_*, dojdeme ke vztahu pro teplotu planety

$$T = T_*\sqrt{\frac{R_*}{2r}}\sqrt[4]{1 - f_\mathrm{b}a_\mathrm{b} - f_\mathrm{c}a_\mathrm{c} - f_\mathrm{p}a_\mathrm{p}}\,.$$

Předpokládejme pro jednoduchost, že druhy bílé a černé sedmikrásky si navzájem nekonkurují. Jedinci stejného druhu si ale konkurují, protože zápasí o stejné zdroje. Jestliže v čase t byl poměr povrchu planety pokrytý bílými sedmikráskami $f_\mathrm{b}(t)$, pak poměr plochy bílých sedmikrásek v čase $t + \Delta t$ je aproximován rekurentním vztahem

$$f_\mathrm{b}(t+\Delta t) = (1 + p_\mathrm{b})f_\mathrm{b}(t) - q_\mathrm{b}f_\mathrm{b}^2(t), \tag{2}$$

kde $0 \leq p_\mathrm{b} \ll 1$ a $0 < q_\mathrm{b} \ll 1$ jsou konstanty a Δt je fixní krátký časový krok. Analogicky část povrchu f_c pokrytá černými sedmikráskami v čase $t + \Delta t$ závisí na poměru plochy pokryté v čase t podle vztahu

$$f_\mathrm{c}(t+\Delta t) = (1+p_\mathrm{c}) f_\mathrm{c}(t) - q_\mathrm{c} f_\mathrm{c}^2(t). \tag{3}$$

c) Najděte poměry F_c, resp. F_b plochy pokryté černými, resp. bílými sedmikráskami v časově rovnovážném stavu. Zajímají nás jen kladná řešení. Výsledky vyjádřete pomocí $p_\mathrm{c}, q_\mathrm{c}, p_\mathrm{b}, q_\mathrm{b}$.

V rovnovážném stavu se poměr plochy pokrytý daným druhem květiny nemění. Jelikož vývoj množství černých i bílých sedmikrásek je popsán stejným typem rovnice, odvodíme rovnovážný poměr jen pro bílé květiny a pro černý druh jen zaměníme konstanty $p_\mathrm{b} \to p_\mathrm{c}$, $q_\mathrm{b} \to q_\mathrm{c}$.

Označme rovnovážný poměr plochy pokrytý bílými květinami jako F_b. Tento poměr se v čase nemění, musí tudíž vyhovovat rovnici

$$F_\mathrm{b} = (1+p_\mathrm{b})F_\mathrm{b} - q_\mathrm{b}F_\mathrm{b}^2 \quad \Longrightarrow \quad 0 = F_\mathrm{b}(p_\mathrm{b} - q_\mathrm{b}F_\mathrm{b})\,.$$

Triviálním řešením je $F_\mathrm{b} = 0$ (na planetě nerostou žádné bílé sedmikrásky). Netriviálním kladným řešením je

$$F_\mathrm{b} = \frac{p_\mathrm{b}}{q_\mathrm{b}}\,.$$

Analogicky rovnovážný poměr plochy pokryté černými květinami je

$$F_\mathrm{c} = \frac{p_\mathrm{c}}{q_\mathrm{c}}\,.$$

d) Prozkoumejte stabilitu řešení, které jste odvodili v předchozí podúloze. Označme například rovnovážný stav bílých sedmikrásek jako F_b. Když tento stav vychýlíme z rovnováhy malou poruchou ΔF, kde $|\Delta F| \ll F_\mathrm{b}$, bude se s časem počet sedmikrásek přibližovat zpět k rovnováze, nebo se porucha bude zvětšovat a rovnováha se poruší? Členy obsahující druhé a vyšší mocniny ΔF lze zanedbat.

Jelikož rovnice popisující množství bílých a černých sedmikrásek mají stejný tvar, i tuto podúlohu vyřešíme jen pro bílé sedmikrásky. Řešení pro černé sedmikrásky bude stejné.

Rovnovážný stav bílých sedmikrásek F_b splňuje rovnici

$$F_\mathrm{b} = (1+p_\mathrm{b})F_\mathrm{b} - q_\mathrm{b}F_\mathrm{b}^2\,. \tag{4}$$

Nyní do řešení zavedeme malou poruchu $F_\mathrm{b} + \Delta F$. Jestliže v čase t byla porucha $\Delta F(t)$, pak v čase $t + \Delta t$ bude porucha $\Delta F(t+\Delta t)$, kterou zjistíme z rovnice

$$F_\mathrm{b} + \Delta F(t+\Delta t) = (1+p_\mathrm{b})(F_\mathrm{b} + \Delta F(t)) - q_\mathrm{b}(F_\mathrm{b} + \Delta F(t))^2\,,$$
$$F_\mathrm{b} + \Delta F(t+\Delta t) = (1+p_\mathrm{b})(F_\mathrm{b} + \Delta F(t)) - q_\mathrm{b}F_\mathrm{b}^2\left(1 + \frac{\Delta F(t)}{F_\mathrm{b}}\right)^2\,.$$

Můžeme zanedbat člen obsahující $(\Delta F)^2$, jelikož platí $|\Delta F(t)/F_\mathrm{b}| \ll 1$. Rovnice se zjednoduší na

$$F_\mathrm{b} + \Delta F(t+\Delta t) = (1+p_\mathrm{b})(F_\mathrm{b} + \Delta F(t)) - q_\mathrm{b}F_\mathrm{b}^2\left(1 + 2\frac{\Delta F(t)}{F_\mathrm{b}}\right)\,,$$
$$F_\mathrm{b} + \Delta F(t+\Delta t) = (1+p_\mathrm{b})F_\mathrm{b} + (1+p_\mathrm{b})\Delta F(t) - q_\mathrm{b}F_\mathrm{b}^2 - 2q_\mathrm{b}F_\mathrm{b}\Delta F(t)\,.$$

Nyní využijeme skutečnosti ze vztahu (4) a taktéž dosadíme výsledek $F_\mathrm{b} = p_\mathrm{b}/q_\mathrm{b}$ z předchozí podúlohy

$$\Delta F(t+\Delta t) = (1+p_\mathrm{b})\Delta F(t) - 2q_\mathrm{b}\frac{p_\mathrm{b}}{q_\mathrm{b}}\Delta F(t)\,,$$
$$\Delta F(t+\Delta t) = (1-p_\mathrm{b})\Delta F(t)\,.$$

Porucha se bude s časem přibližovat k nule, tudíž řešení F_b je stabilní

$$|\Delta F(t+\Delta t)| = |(1-p_\mathrm{b})\Delta F(t)| < |\Delta F(t)|\;.$$

Stejně tak i řešení pro černé sedmikrásky F_c je stabilní, jelikož je popsáno stejnými rovnicemi.

Ověřit stabilitu rovnováhy je důležité. Náš výsledek nám říká, že jakmile se na planetě ustanoví rovnováha v počtu obou druhů květin, výkyvy podmínek nebo drobné fluktuace počtu rostlin rovnováhu nenaruší. Řešení $F = p/q$ z druhé podúlohy je tedy časově stálé.

Nyní se konečně dostáváme k části úlohy, kde prozkoumáme vliv sedmikrásek na teplotu planety. Bílým sedmikráskám se lépe daří při vyšších teplotách. Jejich rozmnožovací koeficient p_b z rovnice (2) závisí na teplotě planety T podle vztahu[3]

$$p_\mathrm{b}(T) = \max\left\{0{,}001\cdot\left[1-\left(\frac{T-T_\mathrm{b}}{\Delta T}\right)^2\right];0\right\}\,, \tag{5}$$

kde $T_\mathrm{b} = 293\,\mathrm{K}$ a $\Delta T = 20\,\mathrm{K}$ jsou konstanty. Černým sedmikráskám se zase lépe daří při nižších teplotách. Jejich rozmnožovací koeficient p_c závisí na teplotě T podle vztahu

$$p_\mathrm{c}(T) = \max\left\{0{,}001\cdot\left[1-\left(\frac{T-T_\mathrm{c}}{\Delta T}\right)^2\right];0\right\}\,, \tag{6}$$

kde $T_\mathrm{c} = 283\,\mathrm{K}$ a $\Delta T = 20\,\mathrm{K}$ jsou konstanty. Umírací koeficient z rovnic (2) a (3) je pro oba druhy sedmikrásek stejný a nezávislý na teplotě $q_\mathrm{b} = q_\mathrm{c} = 0{,}003$.

e) Planeta má poloměr stejný jako Země a obíhá okolo hvězdy po kruhové dráze s poloměrem $r = 0{,}70\,\mathrm{au}$. Mateřská hvězda má stejný zářivý výkon jako Slunce. Na planetě za těchto podmínek rostou oba druhy rostlin. Spočítejte číselně rovnovážnou teplotu na planetě T a taktéž rovnovážné množství bílých a černých sedmikrásek F_b a F_c v daných podmínkách. Některé rovnice budete muset vyřešit numericky.

Rovnovážnou teplotu planety jsme odvodili v rovnici (1) v první podúloze. Rovnou do rovnice dosadíme $f_\mathrm{p} = 1 - f_\mathrm{b} - f_\mathrm{c}$

$$\frac{16\pi\sigma r^2 T^4}{L} = 1 - f_\mathrm{b}a_\mathrm{b} - f_\mathrm{c}a_\mathrm{c} - f_\mathrm{p}a_\mathrm{p} = 1 - f_\mathrm{b}a_\mathrm{b} - f_\mathrm{c}a_\mathrm{c} - (1-f_\mathrm{b}-f_\mathrm{c})a_\mathrm{p}\,,$$
$$\frac{16\pi\sigma r^2 T^4}{L} = 1 - a_\mathrm{p} - f_\mathrm{b}(a_\mathrm{b}-a_\mathrm{p}) + f_\mathrm{c}(a_\mathrm{p}-a_\mathrm{c})\,.$$

[3] Definujeme $\max\{a;b\} = a$ pokud $a \geq b$ a $\max\{a;b\} = b$ pokud $a < b$.

Finále 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Nyní šikovně využijeme, že podle čísel ze zadání platí $1 - a_\mathrm{p} = a_\mathrm{b} - a_\mathrm{p} = a_\mathrm{p} - a_\mathrm{c} = 0{,}50$, čímž se vztah dále zjednoduší

$$\frac{32\pi\sigma r^2 T^4}{L} = 1 - f_\mathrm{b} + f_\mathrm{c}\,. \tag{7}$$

Rovnovážné množství bílých a černých sedmikrásek závisí na teplotě planety T podle vztahu

$$\begin{aligned} f_\mathrm{b} = F_\mathrm{b} = \frac{p_\mathrm{b}(T)}{q_\mathrm{b}} &= \begin{cases} \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{T-T_\mathrm{b}}{\Delta T}\right)^2\right], & T_\mathrm{b} - \Delta T \leq T \leq T_\mathrm{b} + \Delta T\,,\\ 0\,, & \text{jinak,}\end{cases}\\ f_\mathrm{c} = F_\mathrm{c} = \frac{p_\mathrm{c}(T)}{q_\mathrm{c}} &= \begin{cases} \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{T-T_\mathrm{c}}{\Delta T}\right)^2\right], & T_\mathrm{c} - \Delta T \leq T \leq T_\mathrm{c} + \Delta T\,,\\ 0\,, & \text{jinak,}\end{cases}\end{aligned} \tag{8}$$

V zadání bylo řečeno, že za těchto orbitálních podmínek se na planetě vyskytují oba druhy sedmikrásek. Tím pádem předpokládáme, že teplota planety bude mezi $T_\mathrm{b} - \Delta T = 273\,\mathrm{K}$ a $T_\mathrm{c} + \Delta T = 303\,\mathrm{K}$ a vyřešíme rovnice s tímto předpokladem. Pokud teplota T vzešlá z rovnic bude vyhovovat předpokladům, pak jsme našli řešení. Pokud nebude vyhovovat, musíme udělat jiné předpoklady o teplotě a řešit znovu.

Do rovnice (7) dosadíme za f_b a f_c z rovnice (8)

$$\begin{aligned}\frac{32\pi\sigma r^2 T^4}{L} &= 1 - \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{T-T_\mathrm{b}}{\Delta T}\right)^2\right] + \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{T-T_\mathrm{c}}{\Delta T}\right)^2\right],\\ \frac{32\pi\sigma r^2 T^4}{L} &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{T^2}{3\Delta T^2} - \frac{2T_\mathrm{b}T}{3\Delta T^2} + \frac{T_\mathrm{b}^2}{3\Delta T^2} + \frac{1}{3} - \frac{T^2}{3\Delta T^2} + \frac{2T_\mathrm{c}T}{3\Delta T^2} - \frac{T_\mathrm{c}^2}{3\Delta T^2}\,.\end{aligned}$$

Některé členy na pravé straně rovnice se vyruší, a nakonec dostaneme rovnici čtvrtého stupně pro teplotu planety T, kterou musíme vyřešit numericky

$$\frac{32\pi\sigma r^2 T^4}{L} = 1 + \frac{(T_\mathrm{b}^2 - T_\mathrm{c}^2)}{3\Delta T^2} - \frac{2(T_\mathrm{b} - T_\mathrm{c})}{3\Delta T^2}T\,. \tag{9}$$

Zvolíme iterační metodu řešení. Ta spočívá v tom, že na levé straně osamostatníme neznámou T a na pravé straně vznikne nějaká funkce neznámé $g(T)$

$$T = g(T)\,.$$

Dále zvolíme počáteční odhad řešení $T = T_0$, dosadíme do funkce $g(T)$, čímž získáme další odhad řešení $T_1 = g(T_0)$. Každý další odhad řešení T_{i+1} spočítáme z předchozího odhadu T_i jako

$$T_{i+1} = g(T_i)\,.$$

Pokud máme štěstí, odhady řešení s každým dalším krokem konvergují k jedné hodnotě. Pak záleží na nás, kdy se spokojíme s dosaženou přesností výsledku a ukončíme iterace. Pokud nemáme štěstí, odhady řešení divergují, a v tom případě musíme levou a pravou stranu rovnice přeskládat, vyjádřit rovnici $T = g'(T)$ pomocí jiné funkce $g'(T)$ a iterovat znovu.

V naší rovnici (9) máme dvě možnosti, jak sestavit iterační schéma

$$T = \sqrt[4]{\frac{L}{32\pi\sigma r^2}\left(1 + \frac{(T_\mathrm{b}^2 - T_\mathrm{c}^2)}{3\Delta T^2} - \frac{2(T_\mathrm{b} - T_\mathrm{c})}{3\Delta T^2}T\right)}\,,$$

$$T = \frac{3\Delta T^2}{2(T_\mathrm{b} - T_\mathrm{c})}\left(1 + \frac{(T_\mathrm{b}^2 - T_\mathrm{c}^2)}{3\Delta T^2} - \frac{32\pi\sigma r^2 T^4}{L}\right)\,.$$

Zářivý výkon hvězdy $L = L_\odot = 3{,}85 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W}$ je stejný jako zářivý výkon Slunce. Ostatní hodnoty v rovnici jsou konstanty nebo je známe ze zadání. S počátečním odhadem $T_0 = 288\,\mathrm{K}$ uprostřed našeho povoleného intervalu dokonvergovalo druhé iterační schéma k teplotě planety $T = 284{,}3\,\mathrm{K} \doteq 284\,\mathrm{K}$. První iterační schéma s počátečním odhadem $T_0 = 288\,\mathrm{K}$ diverguje a k řešení nevede.

Nalezené řešení $T = 284\,\mathrm{K}$ vyhovuje předpokladu, který jsme udělali na začátku $273\,\mathrm{K} \leq T \leq 303\,\mathrm{K}$. Na planetě za těchto podmínek koexistují oba druhy sedmikrásek. Poměry povrchu planety pokrytého oběma druhy květin spočítáme dosazením $T = 284{,}3\,\mathrm{K}$ do vztahu (8)

$$F_\mathrm{b} = \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{T - T_\mathrm{b}}{\Delta T}\right)^2\right] = 0{,}270 \doteq 0{,}27\,,$$

$$F_\mathrm{c} = \frac{1}{3}\left[1 - \left(\frac{T - T_\mathrm{c}}{\Delta T}\right)^2\right] = 0{,}332 \doteq 0{,}33\,.$$

Část povrchu planety $f_\mathrm{p} = 0{,}40$ zůstává holá.

f) V průběhu stárnutí hvězdy na hlavní posloupnost se její zářivý výkon s věkem zvyšuje. Naše biosféra dokáže snížit růst teploty na planetě. Určete nejnižší a nejvyšší zářivý výkon hvězdy L_min a L_max, při kterém se na planetě ještě udrží oba druhy sedmikrásek (číselně v násobcích $L_\odot$). Pro oba extrémní případy taktéž porovnejte odpovídající teploty T_min, T_max planety s biosférou s hypotetickými teplotami $T_\mathrm{0,min}$, $T_\mathrm{0,max}$ planety, kdyby byla celá pokrytá jen půdou bez sedmikrásek. Všechny teploty spočítejte číselně v kelvinech.

Nejnižší teplota, kdy na planetě ještě mohou žít oba druhy květin, je $T_\mathrm{min} = 273\,\mathrm{K}$. V tom případě jsou rovnovážná množství bílých a černých sedmikrásek $f_\mathrm{b} \approx 0$ a $f_\mathrm{c} = 0{,}25$. Holá část povrchu planety bude $f_\mathrm{p} = 0{,}75$. Zářivý výkon hvězdy, který by na planetě vytvořil teplotu $T_\mathrm{min} = 273\,\mathrm{K}$ spočítáme z rovnice (1)

$$L_\mathrm{min} = \frac{16\pi\sigma r^2 T_\mathrm{min}^4}{1 - f_\mathrm{b}a_\mathrm{b} - f_\mathrm{c}a_\mathrm{c} - f_\mathrm{p}a_\mathrm{p}} \doteq 2{,}78 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W} \doteq 0{,}72 L_\odot\,.$$

Při tomto zářivém výkonu mateřské hvězdy by teplota holé planety bez sedmikrásek byla nižší

$$T_\mathrm{0,min} = \sqrt[4]{\frac{(1 - a_\mathrm{p})L_\mathrm{min}}{16\pi\sigma r^2}} \doteq 258\,\mathrm{K}\,.$$

Finále 2023/24, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Nejvyšší teplota, při které na planetě mohou existovat oba druhy, je $T_{\max} = 303\,\mathrm{K}$. Rovnovážná množství bílých a černých sedmikrásek by byla $f_\mathrm{b} = 0{,}25$ a $f_\mathrm{c} \approx 0$. Holá část povrchu planety bude $f_\mathrm{p} = 0{,}75$. Zářivý výkon hvězdy by v tomto případě byl

$$L_{\max} = \frac{16\pi\sigma r^2 T_{\max}^4}{1 - f_\mathrm{b}a_\mathrm{b} - f_\mathrm{c}a_\mathrm{c} - f_\mathrm{p}a_\mathrm{p}} \doteq 7{,}03 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W} \doteq 1{,}82 L_\odot\,.$$

Holá planeta bez biosféry by při tomto výkonu mateřské hvězdy měla teplotu povrchu vyšší

$$T_{0,\max} = \sqrt[4]{\frac{(1 - a_\mathrm{p})L_{\max}}{16\pi\sigma r^2}} \doteq 326\,\mathrm{K}\,.$$

Vidíme, že naše jednoduchá biosféra složená ze dvou druhů černé a bílé sedmikrásky má vliv na teplotu planety. Díky tomu, že černé květiny lépe prosperují při nižších teplotách a bílé květiny při vyšších teplotách, biosféra zmírňuje nárůst teploty při růstu zářivého výkonu mateřské hvězdy. Děje se tak přirozenou změnou poměru povrchu pokrytého jedním či druhým druhem sedmikrásek.

Autorem úlohy A je Jakub Vošmera, autorem úlohy B je David Kománek, autorem úlohy C je David Bálek, autorem úlohy D je Pavel Kůs, autorem úlohy E je Radka Křížová, autorem úlohy F je Jindřich Jelínek.