

Krajské kolo 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

A Přehledový test

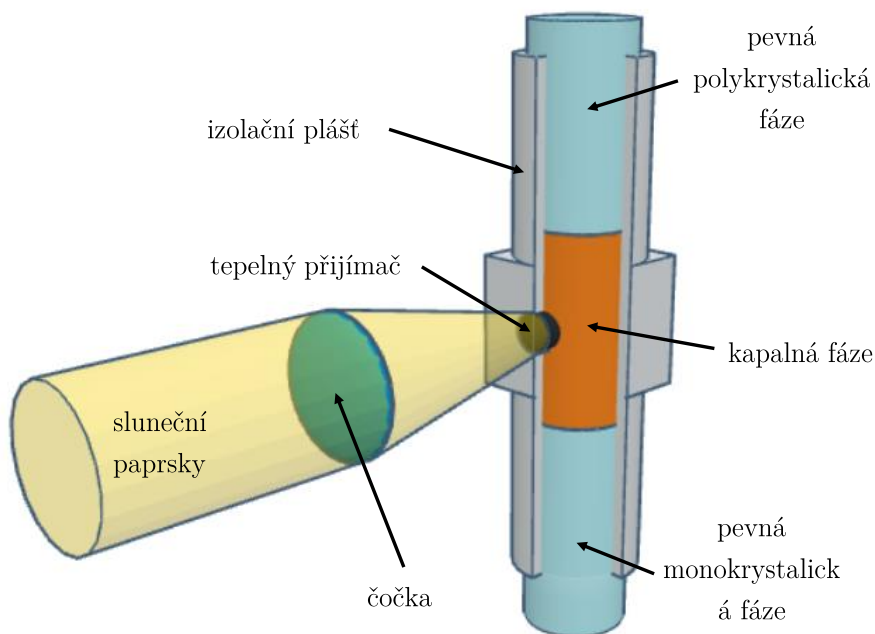
(max. 30 bodů)

POKYNY: Úvodní test se řeší online na <http://olympiada.astro.cz/korespondencni>. Přihlašovací údaje přišly úspěšným řešitelům školního kola e-mailem nebo je dostanete od svého učitele, který je může zjistit v sekci pro učitele na <http://olympiada.astro.cz/ucitel>. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou. U problémů s řešením testu oznámených po **15. 3. 2024** bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení. U každé otázky vyberte **právě jednu** správnou odpověď. Za správnou odpověď je 1 bod. V případě špatné nebo žádné odpovědi je za otázku 0 bodů.

B Zonální tavba

(max. 15 bodů)

Úspěšnou metodou výroby křemíku pro polovodičový průmysl je *zonální tavba*. Předpokládejme, že se v budoucnu přesune i tato výroba do kosmického prostoru a astronauti na kosmické stanici si chtějí vyrobit zařízení na úpravu surového křemíku využívající solární energii. Jeho schéma vidíme na obrázku 1.



Obrázek 1: Schéma aparatury pro zonální tavbu.

Sluneční paprsky jsou soustředěny spojnou čočkou do tepelného přijímače, který je pohltí a předá tavenému surovému křemíku. Křemík se nachází uvnitř izolací pláště a může se v něm pohybovat. Polykrystalický křemík určený k čištění se posouvá směrem k tepelnému přijímači, kde se zahřeje a roztaví. Pod tepelným přijímačem křemík chladne a krystalizuje za vzniku monokrystalu. Při růstu monokrystalu se do mřížky zařazují primárně atomy křemíku a nečistoty zůstávají v kapalně fázi.



Krajské kolo 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Poté, co projde celý válcový ingot křemíku zonální tavbou, zůstanou nečistoty na konci, který je možné odříznout.

V této úloze se zaměříme na stanovení minimální velikosti čočky nutné pro realizaci celého procesu. Tepelné ztráty podstavami válcové aparatury a stěnami pokrytými izolačním pláštěm budeme zanedbávat.

a) Za předpokladu, že se stanice nachází ve vzdálenosti $a = 1$ au od Slunce, určete poloměr R_o obrazu Slunce vytvořeného spojnou čočkou s ohniskovou vzdáleností $f = 10$ m. Můžete využít toho, že platí $f \ll a$. Výsledek vyjádřete obecně pomocí zadaných veličin f , a a skutečného poloměru Slunce R_S . Vypočítejte také hodnotu R_o v cm.

Pro výpočet velikosti obrazu y' vyjdeme ze vztahu pro zvětšení

$$Z = \frac{y'}{y} = \frac{a'}{a},$$

kde za y dosazujeme skutečný poloměr Slunce R_S , a je vzdálenost Slunce od čočky a a' je vzdálenost čočky a obrazu. Tu lze vyjádřit ze zobrazovací rovnice tenké spojky

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$$

jako

$$a' = \frac{af}{a-f} = \frac{f}{1-\frac{f}{a}}.$$

Vidíme tedy, že v našem případě, kdy $f \ll a$, můžeme přibližně uvažovat $f \approx a'$. Po dosazení a vyjádření vyjde

$$R_o = \frac{f}{a} R_S.$$

Číselně dostaneme $R_o \doteq 4,6$ cm.

Pro nejlepší efektivitu zařízení má tepelný přijímač velikost odpovídající velikosti obrazu Slunce a jeho povrch budeme pro jednoduchost považovat za absolutně černý. Zonální tavba je kvůli požadavku na monokrystalizaci poměrně pomalý proces. Díky tomu ale lze předpokládat, že teplota tepelného přijímače a taveného křemíku jsou stejné. Minimální teplotu, které je třeba dosáhnout pro tavení křemíku, budeme značit T_t .

b) Určete tepelný výkon, který předá tepelný přijímač tavenině o teplotě T_t při použití čočky o poloměru R_c . Výsledek vyjádřete obecně pomocí veličin R_c , R_o , T_t a plošného výkonu $k = 1400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ záření přicházejícího od Slunce. Zanedbejte ztráty při průchodu čočkou.

Tepelný výkon předaný tavenině je dán tepelným výkonem dopadajícího záření, od kterého odečteme výkon, který tepelný přijímač vyzařuje zpět do prostoru. Dostaneme tedy

$$P = \pi R_c^2 k - \pi R_o^2 \sigma T_t^4.$$

Krajské kolo 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

c) Vypočtete velikost čočky použité v aparatuře, která je potřebná k dosažení teploty přijímače T_t . Uvažujte rychlost ingotu $v = 5 \text{ cm} \cdot \text{h}^{-1}$, a předpokládejte, že veškerý tepelný výkon se spotřebuje na ohřátí ingotu z počáteční teploty $T_0 = 300 \text{ K}$ na teplotu tání $T_t = 1700 \text{ K}$ a jeho následné roztavení. Další potřebné parametry jsou poloměr ingotu $R_i = 20 \text{ cm}$ a některé vlastnosti křemíku: hustota $\rho = 2300 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, tepelná kapacita $c = 700 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ a skupenské teplo tání $L = 1700 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Pro element hmotnosti křemíku Δm , který projde průřezem aparatury za čas Δt , píšeme

$$\Delta m = \pi R_i^2 v \Delta t \rho.$$

Tomuto elementu je potřeba dodat teplo

$$\Delta Q = \Delta m [c(T_t - T_0) + L].$$

Vydělením této rovnice časovým elementem Δt získáme tepelný výkon, který musíme porovnat s tepelným výkonem P z bodu b). Z rovnice pro P proto vyjádříme nejprve poloměr čočky R_c jako

$$R_c = \sqrt{\frac{P + \pi R_i^2 \sigma T_t^4}{\pi k}},$$

přítom tepelný výkon P lze z podmínky na energetickou bilanci vyjádřit jako

$$P = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\Delta m [c(T_t - T_0) + L]}{\Delta t} = \pi R_i^2 v \rho [c(T_t - T_0) + L].$$

Konečně tak získáme potřebný poloměr čočky

$$R_c = \sqrt{\frac{R_i^2 v \rho [c(T_t - T_0) + L] + R_i^2 \sigma T_t^4}{k}}.$$

Po dosazení číselných hodnot vyjde $R_c \doteq 1,8 \text{ m}$.

Poznámka: Pokud bychom zanedbali ztráty při zpětném vyzařování tepelného přijímače, vyšel by potřebný poloměr čočky $R_c \doteq 1,6 \text{ m}$. Tento malý rozdíl naznačuje, že většina energie se spotřebuje na ohřátí a roztavení křemíku. Rozdíl na druhé platné cifře ale zároveň ukazuje, že tyto ztráty nejsou zanedbatelné.

Krajské kolo 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení**C Punctum æquans***(max. 25 bodů)*

Jak jistě víte, Měsíc má vázanou rotaci. To znamená, že se během jednoho oběhu kolem Země otočí právě jednou kolem své osy. Díky tomu můžeme tvrdit, že ze Země vidíme přibližně jen polovinu jeho povrchu (tzv. přivrácenou stranu). Proč ale pouze přibližně? Pro pozorovatele na Zemi ve skutečnosti Měsíc koná na obloze kývavý pohyb, neboli libraci. K té dochází jednak v důsledku nenulové excentricity oběžné dráhy Měsíce kolem Země (pohyb Měsíce ve dráze je nerovnoměrný, zatímco jeho rotace kolem osy je rovnoměrná), a pak také v důsledku nenulového sklonu jeho osy rotace vůči kolmici k rovině oběžné dráhy (v různých fázích oběhu pak vidíme Měsíc z mírného nadhledu, resp. podhledu). První zmíněný efekt přispívá především k libraci v selenografické délce, druhý pak k libraci v šířce. Velikost pozorovatelné oblasti měsíčního povrchu je dále ovlivněna polohou pozorovatele na povrchu Země a denní rotací Země kolem její osy (tzv. paralaktická librace). Kromě těchto v zásadě čistě optických efektů rozlišujeme rovněž fyzickou libraci, která je způsobena precesí rotační osy Měsíce. Měsíční librace si můžete zkusit sami vizualizovat např. pomocí Moon Libration Applet¹.

Soustředme se nejprve na analýzu librace v délce, kterou pozorovatel umístěný ve středu Země vnímá jako zdánlivé kývání Měsíce kolem jeho rotační osy². Okamžitou úhlovou rychlost tohoto kývání označme jako $\Delta\omega$. Není těžké si rozmyslet, že můžeme psát

$$\Delta\omega = \omega - \Omega,$$

kde ω značí okamžitou úhlovou rychlost průvodiče Měsíce ve dráze kolem Země a $\Omega = 2\pi/P_{\text{rot}}$ označuje úhlovou rychlost rotace Měsíce kolem jeho osy. Zároveň poznamenejme následující:

1. Hodnota Ω je také rovna střední úhlové rychlosti průvodiče, neboť siderická perioda P_{rot} rotace Měsíce kolem osy je v důsledku vázané rotace velmi přesně rovna periodě P_{orb} oběhu Měsíce kolem Země. Platí tedy $P_{\text{rot}} = P_{\text{orb}} = P \doteq 27,321\,661$ d.
2. Úhlová rychlost ω je vztažena k okamžité plošné rychlosti σ průvodiče pomocí vztahu

$$\sigma = \frac{1}{2}\omega r^2, \quad (1)$$

kde r je okamžitá délka průvodiče. Druhý Keplerův zákon říká, že σ je v rámci orbity konstantní. Musí tedy být rovna střední plošné rychlosti $\bar{\sigma} = S_{\odot}/P$, kde S_{\odot} označuje obsah elipsy. Ten spočítáme pomocí velké poloosy a a excentricity e jako $S_{\odot} = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2}$.

a) Určete, jaká místa na oběžné dráze Měsíce kolem Země odpovídají okamžikům nulové librace v délce – jinými slovy okamžikům, kdy Měsíc prochází střední polohou zdánlivého kývání kolem své rotační osy. Svoji odpověď důkladně zdůvodněte.

¹<http://www.jgiesen.de/moonlibration/>

²Efektů způsobujících ostatní druhy libračního kývání budeme zatím ignorovat. Pro jednoduchost budeme rovněž zanedbávat stáčení přímky apsid (spojnice perigea a apogea) i stáčení uzlové přímky (průsečnice roviny oběžné dráhy a roviny ekliptiky) oběžné dráhy Měsíce.

Krajské kolo 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Střední poloha kývavého pohybu odpovídá okamžikům, kdy absolutní hodnota úhlové rychlosti $\Delta\omega$ kývání nabývá maximální hodnoty. Jelikož Ω je konstantní, hledáme okamžiky maximální a minimální okamžité úhlové rychlosti ω Měsíce ve dráze. Jelikož můžeme vyjádřit

$$\omega(r) = \frac{2\sigma}{r^2}, \quad (2)$$

kde plošná rychlost σ je konstantní, zjistíme, že ω je maximální v okamžiku minimální hodnoty r (perigeum) a minimální v okamžiku maximální hodnoty r (apogeum). K nulové libraci v délce tedy dochází při průchodu Měsíce perigeem a apogeem.

Pro specifikaci polohy objektu na eliptické dráze kolem gravitujícího tělesa umístěného v ohnisku nejčastěji používáme úhel θ , který svírá průvodič se směrem k pericentru – tzv. *pravou anomálii*. Velikost průvodiče r potom můžeme v závislosti na θ spočítat jako

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}. \quad (3)$$

Není obtížné ověřit, že pro pericentrum $\theta = 0$ a apocentrum $\theta = \pi$ dráhy dostáváme známé vztahy $r_p = a(1 - e)$ a $r_a = a(1 + e)$. Pro případ oběžné dráhy Měsíce kolem Země nabývají velká poloosa a excentricita hodnot $a = 384 \cdot 10^6$ m a $e = 0,054$.

b) Pro jaké hodnoty $\tilde{\theta}$ pravé anomálie dochází k maximální výchylce libračního kývání Měsíce v délce? Výsledek uveďte ve stupních.

V okamžik maximální výchylky musí být úhlová rychlost $\Delta\omega$ kývání nulová. Dosazením za závislost $r(\theta)$ průvodiče na pravé anomálii do vztahu (2) dostáváme úhlovou rychlost průvodiče

$$\omega(\theta) = \frac{2\sigma}{a^2(1 - e^2)^2} (1 + e \cos \theta)^2$$

jako funkci θ . Po dosazení za plošnou rychlost $\sigma = \bar{\sigma} = \pi a^2 \sqrt{1 - e^2} / P$ a odečtení Ω dostaneme

$$\Delta\omega(\theta) = \Omega \left[(1 - e^2)^{-\frac{3}{2}} (1 + e \cos \theta)^2 - 1 \right].$$

Z podmínky $\Delta\omega(\tilde{\theta}) = 0$ pak můžeme vyjádřit

$$\cos \tilde{\theta} = \frac{1}{e} \left[(1 - e^2)^{\frac{3}{4}} - 1 \right].$$

Číselně dostáváme pro Měsíc hodnoty $\tilde{\theta}_1 \doteq 92,3^\circ$ a $\tilde{\theta}_2 \doteq 267,7^\circ$.

Poznámka: Pro obecnou excentricitu e , která splňuje $e \ll 1$, můžeme aproximovat

$$\frac{1}{e} \left[(1 - e^2)^{\frac{3}{4}} - 1 \right] \approx \frac{1}{e} \left(1 - \frac{3}{4}e^2 - 1 \right) = -\frac{3}{4}e,$$

kde jsme využili binomické aproximace $(1 + x)^p \approx 1 + px$ pro $x \ll 1$. Aplikujeme-li navíc goniometrickou aproximaci $\sin x \approx x$ pro $x \ll 1$, dostaneme dvě řešení pro $\tilde{\theta}$ v obecném



Krajské kolo 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

tvaru

$$\begin{aligned}\tilde{\theta}_1 &\approx +\frac{\pi}{2} + \frac{3}{4}e, \\ \tilde{\theta}_2 &\approx -\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}e,\end{aligned}$$

odkud je zřejmé, že pro malé hodnoty e dojde k maximální libraci poblíž bodu s pravou anomálií 90° a 270° . Po dosazení excentricity oběžné dráhy Měsíce bychom dostali stejné číselné hodnoty $\tilde{\theta}_1$ a $\tilde{\theta}_2$ jako výše.

Z vašeho výsledku části b) by mělo být patrné, že k maximální libraci Měsíce v délce dochází v místech na jeho orbitě kolem Země, kdy pravá anomálie nabývá hodnot přibližně 90° a 270° .

c) Spočítejte hodnotu λ_{\max} maximální librace Měsíce v délce. Výsledek uveďte ve stupních. Můžete použít přibližení, že k maximální libraci dochází v okamžiku, kdy pravá anomálie nabývá hodnoty přesně 90° ³. Všechny ostatní příspěvky k libraci zanedbejte.

Nápověda: Na elipsu lze nahlížet jako na kružnici přeškrálovanou ve směru malé poloosy faktorem $\sqrt{1-e^2}$. Může se vám také hodit vztah pro obsah plochy kruhové úseče

$$S(\alpha) = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin \alpha), \quad (4)$$

kde $\alpha \in [0, \pi]$ je úhel, pod kterým ze středu kružnice o poloměru R vidíme tětivu vymezející úseč.

Jak jsme zjistili v části a), je v perigeu efekt librace v délce nulový. Měsíc je zároveň na elipse nejbližší Zemi a podle druhého Keplerova zákona se musí pohybovat nejrychleji. Rychlost jeho rotace se navíc nemění, je tedy v perigeu menší než úhlová rychlost oběhu a Měsíc se nedotáčí. K tomu, abychom určili, o kolik se Měsíc otočí kolem své osy vzhledem ke hvězdám při pohybu z perigea do místa na dráze s pravou anomálií $\theta = \frac{\pi}{2}$, potřebujeme zjistit odpovídající obsah S_p plochy opsané průvodičem.

Uvažujme, že elipsu roztáhneme podél vedlejší poloosy na kružnici s poloměrem $R = a$. Tím se zvýší obsah její plochy faktorem $1/\sqrt{1-e^2}$. Odpovídající plocha uvnitř kružnice tedy bude mít obsah $S_p/\sqrt{1-e^2}$. Ten je polovina obsahu plochy kruhové úseče, jež je vymezená tětivou, která je kolmá na hlavní poloosu a prochází ohniskem elipsy, ve kterém se nachází Země. Tětivu vidíme ze středu kružnice pod úhlem

$$\alpha = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - e^2 a^2}}{ae} = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e}.$$

Všimněme si, že můžeme přepsat

$$2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1 - e^2}}{e} = \pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \approx \pi - 2e,$$

kde jsme v posledním kroku zanedbali e^2 a využili goniometrické aproximace $\operatorname{tg} x \approx x$ pro $x \ll 1$. Máme tedy přibližně

$$\alpha \approx \pi - 2e.$$

³Jelikož očekáváme, že výsledek pro λ_{\max} bude v radiánech malé číslo, dopouštíme se zanedbáním (taktéž malé) odchylky skutečné hodnoty pravé anomálie v okamžik maximální librace od 90° chyby vyššího řádu.

Krajské kolo 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Po dosazení za excentricitu dráhy Měsíce bychom dostali hodnotu $\alpha \doteq 173,8^\circ$. Obsah plochy opsané průvodičem v elipse potom podle rovnice (4) vypočteme jako

$$S_p = \frac{a^2 \sqrt{1-e^2}}{4} (\alpha - \sin \alpha).$$

Podíl obsahu S_p a obsahu $S_\odot = \pi a^2 \sqrt{1-e^2}$ plochy elipsy z druhého Keplerova zákona odpovídá podílu času t , za který se pravá anomálie Měsíce změní z 0° na 90° , vůči periodě oběhu P . To zároveň odpovídá i podílu úhlu τ , o který se Měsíc za čas t otočí kolem své osy, vůči plnému úhlu 2π . Celkem tedy máme

$$\frac{S_p}{S_\odot} = \frac{1}{4\pi} (\alpha - \sin \alpha) = \frac{t}{P} = \frac{\tau}{2\pi},$$

odkud můžeme vyjádřit

$$\tau = \frac{\alpha - \sin \alpha}{2} \approx \frac{1}{2} [\pi - 2e - \sin(\pi - 2e)] \approx \frac{\pi}{2} - 2e \doteq 83,8^\circ.$$

Librační výchylku konečně spočteme jako $\theta - \tau$. Pro hodnotu pravé anomálie $\theta = \frac{\pi}{2}$ dostaneme $\frac{\pi}{2} - \tau \approx 2e$. Maximální librace Měsíce v šířce je tedy přibližně rovna $\lambda_{\max} \approx 2e \doteq 6,2^\circ$.

Poznámka: po započtení všech ostatních efektů bychom zjistili, že librace v délce ve skutečnosti vykonává oscilace, které jsou modulované vlnou s periodou přibližně 190 dní. Pozorovaná střední hodnota λ_{\max} nicméně odpovídá našemu výsledku.

V předchozích částech jsme demonstrovali souvislost efektu librace v délce s nerovnoměrností úhlového pohybu průvodiče Měsíce vedeného z ohniska elipsy, ve kterém se nachází Země (tzv. *hlavního ohniska*). Zkusme se nyní zamyslet nad existencí bodu uvnitř elipsy, z něhož bychom dokázali vést k Měsíci průvodič, který by se v rámci orbity pohyboval s konstantní úhlovou rychlostí⁴

d) Ukažte, že vztah (1) pro plošnou rychlost σ průvodiče vedeného z hlavního ohniska lze přepsat do tvaru

$$\sigma = \frac{1}{2} \varrho r s, \quad (5)$$

kde $s = 2a - r$ je délka průvodiče vedeného z vedlejšího ohniska a ϱ je úhlová rychlost pohybu tohoto průvodiče (tedy okamžitá rychlost změny úhlu ψ na obrázku 2).

Nápověda: využijte faktu, že odrazivá eliptická plocha odráží paprsky vyzářené z hlavního ohniska přesně do vedlejšího ohniska.

Z vlastností elipsy plyne, že průvodiče Měsíce vedené z hlavního a vedlejšího ohniska můžeme ztotožnit s paprskem vyzářeným z hlavního ohniska a odraženým přímo do vedlejšího ohniska. Odtud plyne, že vektor okamžité rychlosti Měsíce (který míří ve směru tečném k elipse) svírá totožný úhel s oběma průvodiči. Projekce v_\perp okamžité rychlosti v Měsíce do směru kolmého na průvodič tedy bude v případě obou průvodičů stejná. Odtud plyne, že

$$\omega = \frac{v_\perp}{r}, \quad \varrho = \frac{v_\perp}{s},$$

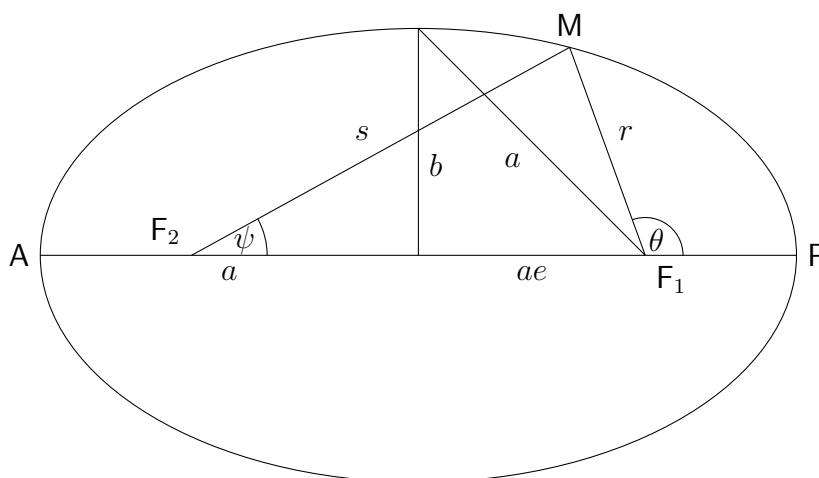
⁴V druhém století našeho letopočtu se konstrukcí tohoto tzv. *puncta æquans* zabýval Claudios Ptolemaios.

Krajské kolo 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení
a tedy

$$\omega = \frac{s}{r} \varrho.$$

Dostáváme tedy

$$\sigma = \frac{1}{2} \omega r^2 = \frac{1}{2} \varrho \frac{s}{r} r^2 = \frac{1}{2} \varrho r s.$$



Obrázek 2: Geometrie elipsy odpovídající oběhu Měsíce (M) kolem Země nacházející se v ohnisku F_1 , kde a je hlavní poloosa, b vedlejší poloosa, θ pravá anomálie, ψ ekvivalent pravé anomálie z druhého ohniska, r a s vzdálenosti Měsíce od ohnisek a e excentricita dráhy. Body P a A značí perigeum a apogeu dráhy. Obrázek je pouze ilustrační.

e) Ukažte, že pro malé excentricity $e \ll 1$ se úhlová rychlost ϱ během oběhu přibližně zachovává. Členy řádu e^2 a vyššího můžete zanedbat.

Platí $2a = r + s$. Vzdálenosti Měsíce od ohnisek jeho dráhy lze tedy zapsat jako

$$r = a + \alpha(t),$$

$$s = a - \alpha(t),$$

kde $\alpha(t) \in \langle -ae, ae \rangle$ (maximální hodnota ae , které $|\alpha(t)|$ nabývá, odpovídá perigeu a apo-geu). Rovnici (5) potom můžeme upravit do tvaru

$$\varrho = \frac{2\sigma}{rs} = \frac{2\sigma}{(a - \alpha)(a + \alpha)} = \frac{2\sigma}{a^2 - \alpha^2}.$$

Pro malé e je $\alpha^2 \leq a^2 e^2 \ll a^2$. Člen α^2 je tedy ve srovnání s a^2 řádu e^2 a můžeme ho zanedbat. Takže platí

$$\varrho \approx \frac{2\sigma}{a^2} = \text{konst.}$$

Krajské kolo 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Poznámka: pokud bychom ponechali ve hře i členy řádu e^2 , dostali bychom po dosažení $s = 2a - r$ a za $r(\theta)$ ze vztahu (3) výsledek

$$\varrho(\theta) = \frac{2\sigma}{a^2} \left[1 + e^2 \cos^2 \theta + \mathcal{O}(e^3) \right],$$

kde $\mathcal{O}(e^3)$ značí členy řádu e^3 a vyššího. Úhlová rychlost ϱ tedy v orbitě není přesně konstantní. Ze symetrie velikostí r a s obou průvodičů nicméně můžeme tvrdit, že $\varrho(\theta = 0) = \varrho(\theta = \pi)$ exaktně do libovolného řádu v e . Zároveň se očividně jedná o jediný bod, kde toto platí. (Posuneme-li se z vedlejšího ohniska po ose elipsy, bude tato vlastnost porušena.) Fakt, že ϱ není v orbitě přesně konstantní, tedy ukazuje na neexistenci exaktního puncta æquans pro eliptickou orbitu.

f) Jak se změní efekt librace v délce, přesuneme-li pozorovatele z hlavního do vedlejšího ohniska?

Úhlová rychlost ϱ je přibližně konstantní, librace v délce je tedy zanedbatelná.

Uvažujme stejné uspořádání jako v první části úlohy (tedy pozorovatele v hlavním ohnisku oběžné dráhy Měsíce) a zaměřme se na librační pohyb v důsledku nenulového sklonu $i = 6,7^\circ$ rotační osy Měsíce vůči normále k rovině jeho oběhu kolem Země. Z Cassiniho zákonů⁵ plyne, že orientace rotační osy Měsíce je svázána s orientací uzlové přímky oběžné dráhy: rotační osa musí být na uzlovou přímku vždy kolmá. Jelikož se uzlová přímka vzhledem k přímce apsid stáčí s periodou přibližně 6 let, bude se stejnou periodou měnit i vzájemná orientace přímky apsid a rotační osy Měsíce.

g) Spočítejte hodnotu β librace v šířce v bodě na dráze Měsíce, kde pozorujeme maximální libraci v délce. Stejně jako v části c) můžete použít přiblížení, že v tomto bodě nabývá hodnota pravé anomálie přesně 90° . Uvažujte epochu, kdy při posledním průchodu Měsíce perigeem byl úhel librace v šířce maximální možný.

Úhel otočení vlivem librace v šířce byl v perigeu maximální, projekce rotační osy Měsíce do roviny oběhu tedy souhlasí s přímkou apsid. Efekt stáčení této projekce vůči přímce apsid je v rámci jednoho oběhu Měsíce zanedbatelný (stačí se s periodou přibližně 6 let). Pro $\theta = 90^\circ$ bude projekce rotační osy přesně kolmá na směr k pozorovateli (průvodič), librace v šířce je tedy nulová, tedy $\beta = 0^\circ$. Měsíc se tedy mezi perigeem a okamžikem $\theta = 90^\circ$ otočí v selenografické šířce o úhel $i = 6,7^\circ$.

Nadšený amatérský astrofotograf pořizuje časozběrné video Měsíce. Neví sice nic o libraci, všimne si ale, že se Měsíc ve videu otáčí. Uvažujte, že obraz Měsíce je na videu vždy orientován tak, aby přímka spojující severní a jižní selenografický pól mířila podél vertikální hrany snímku.

h) O jaký úhel l se otočí Měsíc dohromady vlivem librací v šířce a délce spočítaných v předchozích částech úlohy při pohybu z bodu s pravou anomálií 0° do bodu s pravou anomálií 90° ?

Jedná se o pohyb z perigea do nejbližšího bodu, kdy je librace v délce přibližně maximální. Mějme sférický trojúhelník, jehož 2 strany představující příspěvky k libraci v délce a šířce svírají pravý úhel. Společný příspěvek k libraci dostaneme ze sférické kosinové věty

$$\cos l = \cos \lambda_{\max} \cos i,$$

⁵Viz například https://en.wikipedia.org/wiki/Cassini%27s_laws.

Krajské kolo 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

tedy

$$l = \arccos(\cos \lambda_{\max} \cos i) \doteq 9,1^\circ.$$

D Mezní hvězdná velikost

(max. 30 bodů)

Mezní hvězdná velikost vyjadřuje kvalitu hvězdné oblohy. Jde o hvězdnou velikost nejslabší hvězdy, kterou můžeme spatřit pouhým okem. Existuje více metod určení mezní hvězdné velikosti. Jednou z nich je změření pomocí obrazce.

Na noční obloze si pozorovatel vybere trojúhelník nebo jiný obrazec z jasných hvězd. Spočítá hvězdy, které vidí pouhým okem včetně hvězd v rozích obrazce. Existují převodní tabulky, které pro daný obrazec na obloze převedou počet spatřených hvězd na mezní hvězdnou velikost.

V této úloze metodou obrazců změříte, jak se mezní hvězdná velikost mění s hloubkou Slunce pod obzorem. Několik hvězdných obrazců, které můžete použít, najdete definovány v tabulce 6. Obrazce byly vybrány tak, aby od ledna do března byly nad obzorem ve večerních nebo v ranních hodinách.

a) Najděte si pozorovací místo s nezakrytým výhledem na oblohu a pokud možno daleko od zdrojů světelného znečištění. Po příchodu na pozorovací místo nechte vaše oči alespoň 10 minut adaptovat se do tmy. Pomocí metody obrazce změřte, jak se mezní hvězdná velikost vyvíjí v čase po západu nebo před východem slunce. Dobu pozorování zvolte od začátku nautického soumraku do nástupu astronomické noci (v případě ranního měření naopak). Obrazce nepokrývají rozsah hvězdných velikostí rovnoměrně, proto určete mezní hvězdné velikosti pomocí několika z nich a vyberte nejvyšší hodnotu.

Provedte měření závislosti mezní hvězdné velikosti na čase v alespoň dvou různých nocích. Zaznamenejte také charakter vašeho pozorovacího místa (střed města/park/vesnice/pole/...), jestli byl Měsíc nad obzorem a v jaké fázi, a další faktory, které mohly ovlivnit mezní hvězdnou velikost. Klidně můžete zvolit i rozdílná pozorovací místa pro různé noci.

Poznámka: Klidně můžete k odhadu mezní hvězdné velikosti použít i vlastní obrazce z hvězd. V tom případě je ale popište ve vašem řešení i s tím, jaká je mezní hvězdná velikost podle počtu spatřených hvězd.

Provedli jsme čtyři pozorování po západu slunce ve dnech 22. 11., 23. 11., 3. 12. a 15. 12. Pozorování ze dnů 22. 11., 23. 11. a 15. 12. byla provedena ze stejného místa v Ženevě na souřadnicích $46,197^\circ$ s. š. $6,133^\circ$ v. d. Pozorovací místo bylo uprostřed města s výhledem přes řeku na jihozápadní obzor. Vzhledem ke zvolenému místu uprostřed města byla hvězdná obloha postižená silným světelným znečištěním. V nocích 22. 11. a 23. 11. zářil nad jihovýchodním obzorem Měsíc po první čtvrti. 22. 11. se po části oblohy pohybovala vysoká oblačnost, ale nezasáhla do našich hvězdných obrazců. V noci 15. 12. zářil jen tenký srpek Měsíce nízko nad jihozápadním obzorem, takže můžeme noc označit jako bezměsíčnou. Pozorování večer 3. 12. bylo provedeno na okraji Ženevy na souřadnicích $46,239^\circ$ s. š. $6,130^\circ$ v. d. Charakter pozorovacího místa byl okraj města s volným výhledem na všechny světové strany. Světelné znečištění bylo nižší než ve středu města. Těsně před koncem astronomického soumraku se začala objevovat vysoká oblačnost. Shrnutí časů



Krajské kolo 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení
soumraků a časů pozorování najdete v tabulce 1. Ve dnech 22. 11. a 23. 11. začalo pozorování později kvůli jiným povinnostem.

datum	začátek nautického soumraku	konec astronomického soumraku	začátek pozorování	konec pozorování
22. 11.	17:30	18:42	17:47	18:28
23. 11.	17:30	18:42	17:55	18:38
3. 12.	17:24	18:38	17:24	18:35
15. 12.	17:24	18:39	17:24	18:36

Tabulka 1: Shrnutí pozorovacích nocí. Všechna pozorování byla provedena ze Ženevy.

Vzhledem k časovému rozdílu méně než jeden měsíc mezi pozorovacími dny byla souhvězdí na noční obloze ve všech dnech podobná. Blízko zenitu se nacházel obrazec z hvězd γ Cyg, ϵ Cyg, η Cyg (označme ho číslem 1) a nad západním obzorem ve výšce okolo 40° se nacházel obrazec z hvězd π Her, τ Her, β Dra (označme ho číslem 2). Při pozorování 3. 12. byl taktéž nad východním obzorem vidět obrazec z hvězd β Per, δ Per, ζ Per (označme ho číslem 3). Z prvního pozorovacího místa uprostřed města vidět nebyl, neboť východní obzor byl přesvětlený.

Napozorované mezní hvězdné velikosti (MHV) v závislosti na čase pro všechny dny jsou napsány v tabulkách 2, 3, 4 a 5. Pravidelně jsme sledovali počty viditelných hvězd v obrazech 1 a 2 (a 3. 12. i v obrazi 3). Zapsali jsme časy, kdy jsme byli schopni rozpoznat další hvězdu v obrazi. Hloubku Slunce pod obzorem v daných časech jsme zjistili v programu *Stellarium*. Nutno podotknout, že hvězda η Cyg s hvězdnou velikostí 3,9 mag v obrazi 1 a hvězda π Her s hvězdnou velikostí 3,1 mag v obrazi 2 šly ze středu města rozpoznat s obtížemi a jen pokud člověk věděl, kam se dívat. To platilo po celou dobu až do ukončení pozorování. Obrazec 1 byl téměř v zenitu, zatímco obrazec 2 byl níže nad obzorem. To mohlo způsobit horší viditelnost jasnější hvězdy π Her srovnatelnou se slabší hvězdou η Cyg. Hvězda τ Her s hvězdnou velikostí 3,9 mag v obrazi 2 nebyla vidět vůbec. Před začátkem astronomické noci ve dne 3. 12. na okraji města byly s velkými obtížemi rozpoznatelné i hvězdy s hvězdnou velikostí 4,8 mag v zenitu, pokud člověk věděl, kam se dívat.

čas	obrazec	počet hvězd	MHV (mag)	hloubka Slunce
17:49	1	2	2,5	$9^\circ 03'$
17:52	2	1	2,8	$9^\circ 32'$
18:03	2	2	3,1	$11^\circ 20'$
18:16	1	3	3,9	$13^\circ 30'$

Tabulka 2: Záznam pozorování ze dne 22. 11.

b) Pro vaše jednotlivá měření mezní hvězdné velikosti najděte hloubku Slunce pod obzorem v daný okamžik (např. s pomocí programu *Stellarium* či jiných zdrojů). Do grafu vynesete mezní hvězdné

⁵Hodnoty v tabulce převzaty z https://project-nightflight.net/limiting_mag.pdf.

Krajské kolo 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

čas	obrazec	počet hvězd	MHV (mag)	hloubka Slunce
17:55	2	1	2,8	10° 08'
18:08	2	2	3,1	12° 16'
18:16	1	3	3,9	13° 36'

Tabulka 3: Záznam pozorování ze dne 23. 11.

čas	obrazec	počet hvězd	MHV (mag)	hloubka Slunce
17:30	1	1	2,2	6° 55'
17:38	1	2	2,5	8° 10'
17:40	2	1	2,8	8° 29'
17:43	3	2	2,9	8° 58'
17:46	3	3	3,0	9° 27'
17:53	3	4	3,8	10° 34'
17:59	1	3	3,9	11° 33'
18:32	1	6	4,8	17° 0'

Tabulka 4: Záznam pozorování ze dne 3. 12.

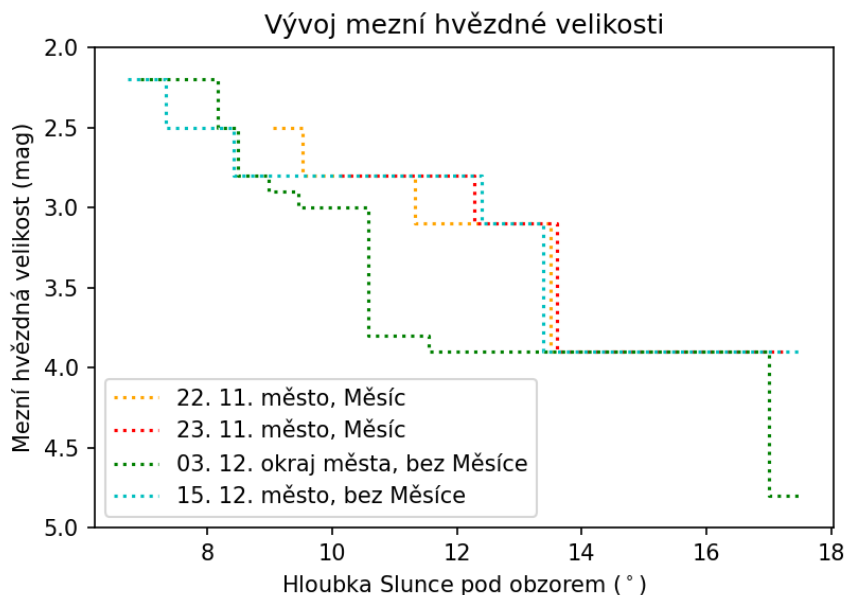
čas	obrazec	počet hvězd	MHV (mag)	hloubka Slunce
17:29	1	1	2,2	6° 43'
17:33	1	2	2,5	7° 20'
17:40	2	1	2,8	8° 25'
18:05	2	2	3,1	12° 24'
18:11	1	3	3,9	13° 23'

Tabulka 5: Záznam pozorování ze dne 15. 12.

Krajské kolo 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

velikosti v závislosti na hloubce Slunce pod obzorem. Liší se křivky pro různé noci? Diskutujte, které faktory mohly ovlivnit rozdílnost křivek, případně jestli jsou si křivky podobné navzdory některým rozdílným podmínkám.

Závislost mezní hvězdné velikosti (MHV) na hloubce Slunce pod obzorem vidíme na obrázku 3. Tři křivky ze středu města jsou si podobné. Není viditelný žádný vliv Měsíce. Mezní hvězdná velikost ve městě klesá k 3,9 mag v zenitu před začátkem astronomické noci. Hvězdy s touto hvězdnou velikostí jsou ale viditelné jen v případě, že pozorovatel ví, kam se dívat. Křivka ze 3.12. z okraje města začíná podobně jako křivka z 15. 12., ale později roste MHV rychleji. Možné vysvětlení je, že na začátku nautického soumraku je mezní hvězdná velikost ovlivněna hlavně rozptýleným slunečním světlem v atmosféře, jehož intenzita primárně závisí na hloubce Slunce pod obzorem. Až později převáží vliv světelného znečištění. Na závěr je ještě nutné zmínit, že mezní hvězdná velikost je individuální pro každého pozorovatele a záleží na zkušenosti i ostrosti zraku.



Obrázek 3: Vývoj mezní hvězdné velikosti podle hloubky Slunce pod obzorem.

Autorem přehledového testu A je kolektiv autorů AO. Úlohu B navrhl Lukáš Supík, úlohu C navrhl David Kománek, úlohu D navrhl Jindřich Jelínek.



Krajské kolo 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Tabulka 6: Obrazce pro určení mezní hvězdné velikosti.⁶

Počet viditelných hvězd	Krajní hvězdy obrazce							
	β Per	α Tau	α Gem	β UMa	ε UMa	α Boo	π Her	γ Cyg
	δ Per	β Tau	β Gem	θ UMa	η UMa	γ Boo	τ Her	ε Cyg
	ζ Per	ζ Tau	ε Gem	h UMa	α CVn	α CrB	β Dra	η Cyg
	Mezní hvězdná velikost (mag)							
1	2,1	1,0	1,2	2,4	1,8	0,2	2,8	2,2
2	2,9	1,7	2,0	3,2	1,9	2,2	3,1	2,5
3	3,0	3,0	3,0	3,7	2,9	2,4	3,9	3,9
4	3,8	4,6	3,8	3,8	4,7	3,0	4,8	4,7
5	5,0	4,9	5,0	4,5	5,2	3,6	5,1	4,7
6	5,2	5,0	5,1	4,6	5,6	4,5	5,5	4,8
7	5,6	5,1	5,3	4,8	5,8	4,5	5,7	4,9
8	5,6	5,3	5,8	5,1	5,9	4,8	5,8	5,1
9	5,8	5,4	5,8	5,2	5,9	4,8	5,9	5,4
10	5,8	5,5	5,8	5,5	6,1	4,9	6,0	5,6
11	6,0	5,7	6,2	5,7	6,4	5,3	6,1	5,6
12	6,0	5,8	6,4	5,7	6,5	5,5	6,1	5,9
13	6,1	6,1	6,5	5,8	6,6	5,7	6,2	5,9
14	6,4	6,2	6,5	6,0	6,7	5,8	6,2	6,0
15	6,4	6,3	6,7	6,2	6,8	5,8	6,3	6,3