Finále 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení
Teoretická část
Krátké úlohy

A Extrémní západy

(max. 10 bodů)

Kolikrát kratší dobu trvá západ Slunce na rovníku než na našich zeměpisných šířkách ($\phi = 50°$)? A kolikrát déle než ten u nás trvá západ Slunce na severním pólu? Západem Slunce rozumějte dobu, za kterou přejde celý sluneční disk přes horizont. Všechny západy berte v období okolo podzimní rovnodennosti. Pro jednoduchost neuvažujte refrakci.

Začneme nejjednodušším případem, kterým je západ Slunce na rovníku. Dominantním efektem je zde rotace Země kolem vlastní osy. Změnu deklinace Slunce můžeme bezpečně zanedbat a uvažovat, že je deklinace po celou dobu nulová. To znamená, že se Slunce pohybuje od východu přes zenit až na západ, kde zachází přesně kolmo na horizont. Úhlová rychlost tohoto pohybu je $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, kde $T = 24\,\mathrm{h}$ je délka slunečního dne. Při průměru slunečního disku $d = 32'$ tedy západ Slunce bude trvat dobu

$$t_0 = \frac{d}{\omega_0} = \frac{dT}{2\pi}\,.$$

Číselně by vyšlo 2 min 8 s. Pro obecnou zeměpisnou šířku ϕ se bude Slunce o rovnodennosti pohybovat opět od východu na západ stejnou úhlovou rychlostí, ale bude dosahovat maximální výšky $h_{\max} = 90° - \phi$, v důsledku čehož bude zapadat pod úhlem $90° - \phi$ vůči rovině horizontu. Vzhledem k malým úhlovým velikostem oblouků, které Slunce na obloze během západu opíše, si vystačíme s rovinnou geometrií. Z obrázku 1 je patrné, že sluneční disk musí urazit dráhu $x = \frac{d}{\cos\phi}$, aby zapadl. Pro dobu trvání západu t_ϕ tedy máme

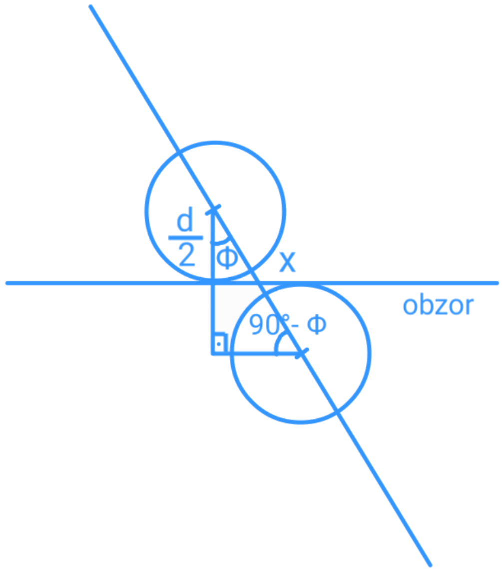
$$t_\phi = \frac{x}{\omega_0} = \frac{dT}{2\pi\cos\phi}\,. \tag{1}$$

Vidíme tedy, že poměr časů západu na zeměpisné šířce $\phi = 50°$ je

$$\frac{t_{50}}{t_0} = \frac{1}{\cos 50°}\,.$$

Číselně dostáváme $\frac{t_{50}}{t_0} = 1{,}56$.

Na pólu je situace složitější. Pokud bychom se řídili jen vztahem (1), vyšel by nám nekonečný čas západu, neboť $\cos 90° = 0$. Slunce by tedy na pólu nikdy nezapadlo. Ve skutečnosti však zapadnout může, a to díky změně své deklinace v průběhu roku. Pokud zanedbáme refrakci, závisí výška Slunce h na severním pólu na deklinaci δ jednoduše podle vztahu $h = \delta$. To znamená, že aby Slunce zapadlo, musí se deklinace středu slunečního disku změnit z $+\frac{d}{2}$ na $-\frac{d}{2}$. Deklinace Slunce se nejrychleji mění právě v okolí rovnodenností. Poblíž podzimní rovnodennosti klesá, a to přibližně lineárně. To je způsobeno pohybem Slunce po ekliptice, která je vůči zemskému rovníku skloněna přibližně o úhel $\varepsilon = 23{,}5°$. Z obrázku 2 můžeme vidět, že za čas Δt se deklinace v okolí podzimní

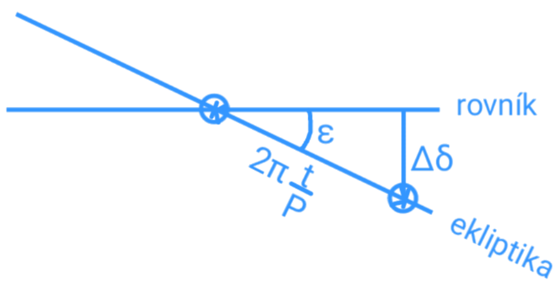


Obrázek 1: Západ Slunce na obecné zeměpisné šířce ϕ.

rovnodennosti změní o $\Delta\delta \approx -\frac{2\pi\Delta t}{P}\sin\varepsilon$, kde P je délka tropického roku. Dosazením hodnoty $\Delta\delta = -d$ můžeme vyjádřit dobu trvání t_{90} západu Slunce na severním pólu v poměru k době trvání západu Slunce u nás jako

$$\frac{t_{90}}{t_{50}} = \frac{\frac{dP}{2\pi\sin\varepsilon}}{\frac{dT}{2\pi\cos 50^\circ}} = \frac{P}{T}\frac{\cos 50^\circ}{\sin\varepsilon}\,.$$

Číselně dostáváme $\frac{t_{90}}{t_{50}} = 589$, západ Slunce na pólu tedy trvá přibližně 32 h 34 min.



Obrázek 2: Pohyb Slunce po ekliptice kolem podzimní rovnodennosti.

Finále 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

B Paralaxa na eliptické dráze

(max. 10 bodů)

Perihelium Země letos nastalo dne 2. ledna a rovnodennost 20. března. Nalezněte ekliptikální souřadnice (β, λ) blízké hvězdy, která vlivem paralaxy opisuje přesné kružnice vůči vzdáleným hvězdám. Nalezněte všechna řešení. Výstřednost zemské dráhy je $e = 0{,}017$.

Blízké hvězdy na ekliptikálním pólu v průběhu roku zdánlivě opisují elipsy ve tvaru dráhy Země vůči vzdáleným hvězdám. Čím blíže je hvězda ekliptice, tím více je tato elipsa zploštělá.

Za prvé nalezneme poměr velké a malé poloosy zemské dráhy

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}\,.$$

Dále určíme potřebnou ekliptikální šířku na základě tohoto poměru

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2} = \sin\beta\,.$$

Dostáváme výsledek $\beta \doteq 89°1'34''$, ale nesmíme zapomenout také na $\beta \doteq -89°1'34''$. Dále určíme ekliptikální délku. Bude se jednat o hvězdy, které uvidíme na meridiánu v pravou půlnoc během perihelia a afélia. Střední denní pohyb Slunce po ekliptice je

$$n = \frac{360°}{365{,}25\,\mathrm{d}}\,,$$

a perihelium nastalo o 78 dní dříve před rovnodenností. Můžeme například spočítat ekliptikální šířku slunce během perihelia, jako

$$\lambda_\odot = 360° - 78\,\mathrm{d} \cdot n = 283{,}1°\,,$$

a hledaná šířka hvězdy bude $\lambda = \lambda_\odot - 180° = 103{,}1°$. Nesmíme ale opět zapomenout na podzimní řešení $\lambda = 283{,}1°$. Kombinací těchto dvou šířek a dvou délek získáváme čtyři polohy na obloze, kde hvězdy opisují díky paralaxe přesné kružnice.

Finále 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

C Gemini

(max. 10 bodů)

Uvažujme dvě identické hvězdy, kde každá má poloměr $R = 86R_\odot$ a tepelný výkon $P = 2000L_\odot$.

a) Vypočtěte efektivní teplotu T povrchu obou hvězd v kelvinech za předpokladu, že se hvězdy nachází velmi daleko od sebe.

Zářivý výkon osamocené hvězdy odpovídá jejímu tepelnému výkonu. Ze Stefan-Boltzmannova zákona tedy můžeme psát

$$P = 4\pi R^2 \sigma T^4 \,.$$

Odtud vyjádříme efektivní teplotu T osamocených hvězd jako

$$T = \sqrt[4]{\frac{P}{4\pi R^2 \sigma}} = \sqrt[4]{\frac{2000}{86^2}} \cdot \sqrt[4]{\frac{L_\odot}{4\pi R_\odot^2 \sigma}} \doteq 0{,}72 T_\odot \,,$$

kde

$$T_\odot = \sqrt[4]{\frac{L_\odot}{4\pi R_\odot^2 \sigma}} \doteq 5\,770\,\mathrm{K} \,.$$

Číselně tedy dostaneme $T \doteq 4\,160\,\mathrm{K}$.

b) O jakou hodnotu ΔT (opět v kelvinech) se efektivní teplota hvězd změní, přiblížíme-li je na vzdálenost $d = 1000R_\odot$ od sebe? Můžete předpokládat, že povrch každé hvězdy má všude stejnou teplotu a že jejich poloměry R a tepelné výkony P se po přiblížení nezmění.

V případě, že se hvězdy nacházejí v konečné vzdálenosti od sebe, dochází k jejich vzájemnému ohřívání. Zářivý výkon L jedné z hvězd je potom určen jejím tepelným výkonem P a zároveň výkonem I záření, které tato hvězda přijímá od druhé hvězdy. Jelikož dle zadaných číselných hodnot platí $R \ll d$, budeme I počítat jako výkon přijatý od bodového zdroje, který se nachází ve velmi velké vzdálenosti, tedy

$$I = \frac{L}{4\pi d^2} \cdot \pi R^2 = \left(\frac{R}{2d}\right)^2 L \,.$$

Celkem můžeme psát energetickou bilanci a Stefanův-Boltzmannův zákon ve tvaru

$$L = P + I = P + \left(\frac{R}{2d}\right)^2 L = 4\pi R^2 \sigma (T + \Delta T)^4 \,.$$

Odtud pak lze vyjádřit nejprve

$$L = P\left[1 - \left(\frac{R}{2d}\right)^2\right]^{-1}$$

a potom

$$\Delta T = \sqrt[4]{\frac{P}{4\pi R^2 \sigma}} \sqrt[-4]{1 - \left(\frac{R}{2d}\right)^2} - T = T\left[\sqrt[-4]{1 - \left(\frac{R}{2d}\right)^2} - 1\right] \doteq 2\,\mathrm{K} \,.$$

Poznámka: jelikož $R \ll d$, můžeme obecný výsledek rovněž zapsat v přibližném tvaru $\Delta T \approx \frac{T}{4}\left(\frac{R}{2d}\right)^2$.

Finále 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

D Neutronové špagety

(max. 10 bodů)

V roce 1974 objevili Russell Alan Hulse a Joseph Taylor binární systém obsahující pulsar a neutronovou hvězdu, jehož pozorování vedlo k potvrzení gravitačních vln podle Einsteinovy teorie relativity. Jindra se rozhodl, že 50. výročí objevu musí pořádně oslavit. Má v plánu stát se prvním člověkem, který prozkoumá zblízka neutronovou hvězdu.

Jindra má v plánu padat radiálně směrem k povrchu kompaktního objektu. Pomozte mu spočítat minimální bezpečnou výšku h (v kilometrech), na kterou se může přiblížit, aby nebyl roztrhán slapovými silami. Uvažujte astronauta, jehož tělo je orientované rovnoběžně se směrem působení gravitační síly. Neutronová hvězda má hmotnost $M = 1{,}4\,M_\odot$, poloměr $R = 10\,\mathrm{km}$ a nerotuje. Lidské tělo vydrží sílu $F_{\max} = 10\,\mathrm{kN}$. Slapovou sílu počítejte jako rozdíl mezi silou působící na horní a dolní půlku těla, každou s hmotností $\frac{m}{2} = 35\,\mathrm{kg}$, které se nacházejí $d = 1{,}0\,\mathrm{m}$ daleko od sebe.

Nápověda: Pro $a \ll b$ (čti a velmi malé oproti b) platí přibližný vztah $\frac{1}{(b\pm a)^2} \approx \frac{1}{b^2} \mp \frac{2a}{b^3}$.

Budeme uvažovat, že horní část těla se od kompaktního objektu nachází ve vzdálenosti $r_\mathrm{h} = R + h + d/2$, zatímco dolní část ve vzdálenosti $r_\mathrm{d} = R + h - d/2$. Na dolní část těla působí síla

$$F_\mathrm{d} = -\frac{G\frac{m}{2}M}{(R+h-\frac{d}{2})^2}\,,$$

kde G je Newtonova gravitační konstanta. Na horní část působí síla

$$F_\mathrm{h} = -\frac{G\frac{m}{2}M}{(R+h+\frac{d}{2})^2}\,.$$

V mezním případě musí platit

$$F_{\max} = F_\mathrm{h} - F_\mathrm{d} = -\frac{G\frac{m}{2}M}{(R+h+\frac{d}{2})^2} + \frac{G\frac{m}{2}M}{(R+h-\frac{d}{2})^2}\,.$$

Abychom mohli vyjádřit h, použijeme zadanou aproximaci, protože zřejmě bude platit $\frac{d}{2} \ll R + h$. Máme pak

$$\frac{1}{(R+h\pm\frac{d}{2})^2} \approx \frac{1}{(R+h)^2} \mp \frac{d}{(R+h)^3}\,.$$

Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned}\frac{2F_{\max}}{GMm} &\approx -\frac{1}{(R+h)^2} + \frac{d}{(R+h)^3} + \frac{1}{(R+h)^2} + \frac{d}{(R+h)^3}\\ &= \frac{2d}{(R+h)^3}\,,\end{aligned}$$

a tedy

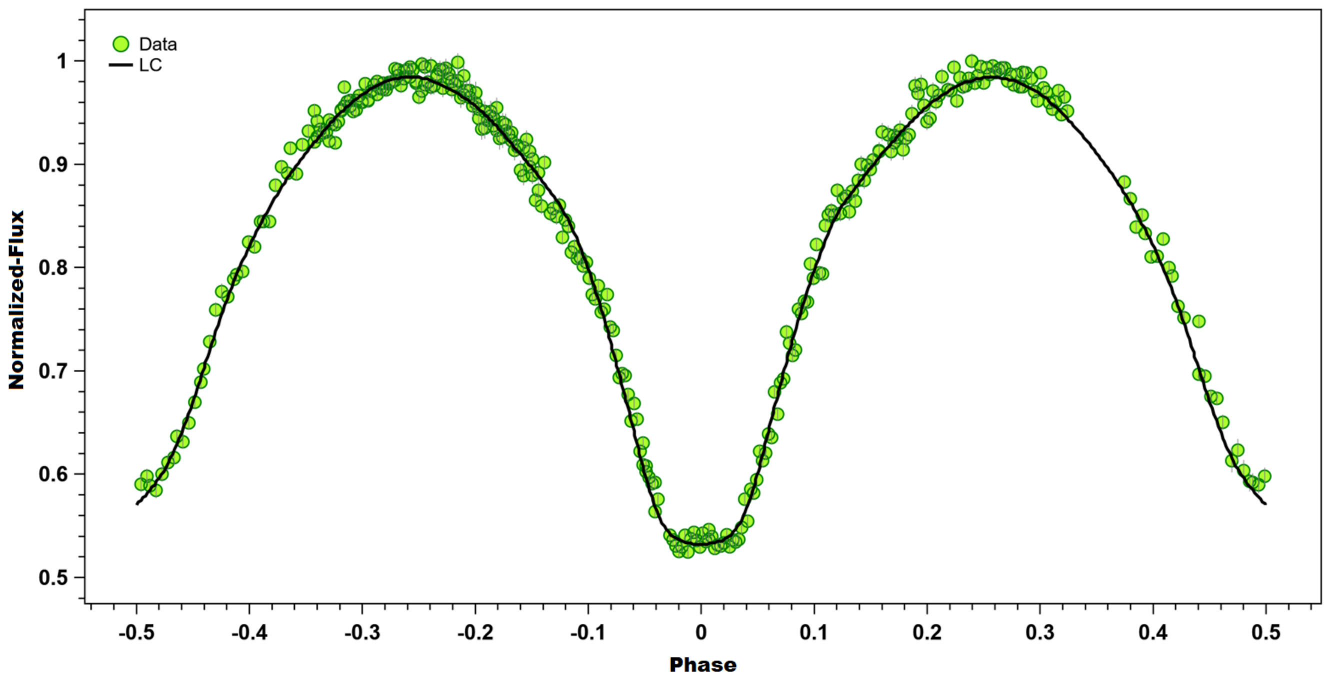
$$h \approx \sqrt[3]{\frac{GMmd}{F_{\max}}} - R \doteq 1\,100\,\mathrm{km}\,.$$

Finále 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení
Teoretická část
Dlouhé úlohy

E Zákrytová

(max. 20 bodů)

Hypotetická zákrytová dvojhvězda, jejíž světelnou křivku můžete vidět na obrázku 3, má periodu oběhu $P = 0{,}380\,\mathrm{d}$ (ano, dne). Z dlouhodobých pozorování vyplynulo, že sklon dráhy je přibližně 90° (směr k Zemi se tedy nachází v rovině oběhu) a že obě složky obíhají po kruhových drahách kolem hmotného středu soustavy. Pomocí spektroskopických pozorování byly také změřeny rychlosti oběhu jednotlivých hvězd, konkrétně $v_1 = 150\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$ a $v_2 = 201\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$.



Obrázek 3: Světelná křivka systému.

a) Určete vzdálenost a mezi hvězdami číselně v m.

Uvažme, že vzdálenost první, resp. druhé hvězdy od hmotného středu je a_1, resp. a_2. Potom platí

$$v_1 = \frac{2\pi a_1}{P}\,,$$
$$v_2 = \frac{2\pi a_2}{P}\,.$$

Odtud získáme

$$a = a_1 + a_2 = \frac{P}{2\pi}(v_1 + v_1) \doteq 1{,}83 \cdot 10^9\,\mathrm{m}\,.$$

b) Zjistěte a číselně v kg vyjádřete, jaké jsou hmotnosti M_1 a M_2 jednotlivých složek binárního systému.

Ze 3. Keplerova zákona máme

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \,,$$

kde $M = M_1 + M_2$. Dále z rovnice pro hmotný střed můžeme psát

$$a_1 M_1 = a_2 M_2 \,,$$
$$a_1 M_1 = a_2 (M - M_1) \,,$$

a tedy

$$M_1 = \frac{a_2}{a_1 + a_2} M = \frac{v_2}{v_1 + v_2} \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} \doteq 1{,}94 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} \,,$$
$$M_2 = \frac{a_1}{a_1 + a_2} M = \frac{v_1}{v_1 + v_2} \frac{4\pi^2 a^3}{GP^2} \doteq 1{,}45 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg} \,.$$

Dále o binárním systému víme, že jeho pozorovaná vizuální hvězdná velikost v maximu je $m_\mathsf{V} = 13{,}5\,\mathrm{mag}$ a že jeho paralaxa je[1] $\pi = 1{,}385\,\mathrm{mas}$. Ze spektroskopických pozorování systému byly rovněž určeny hodnoty teploty první hvězdy $T_1 = 5\,630\,\mathrm{K}$ a druhé hvězdy $T_2 = 5\,800\,\mathrm{K}$.

c) Pomocí světelné křivky určete zářivé výkony první hvězdy L_1 a druhé hvězdy L_2 číselně ve W. Předpokládejte, že hmotnější hvězda je také větší. Bolometrickou korekci zanedbejte.

Zde je důležité rozlišit, o jakou situaci se jedná, protože je druhá hvězda teplejší a $R_1 > R_2$, odpovídá primární zákryt situaci, kdy je druhá hvězda celá v zákrytu za první. Ze světelné křivky dostaneme, že hloubka primárního zákrytu je $h = 0{,}53$. Pro hloubku dostaneme vztah

$$h = \frac{L_1}{L_1 + L_2} \,,$$
$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{1}{h} - 1 \doteq 0{,}887 \,.$$

Vzdálenost k systému je $d = 1/\pi = 722\,\mathrm{pc}$. Z Pogsonovy rovnice plyne, že absolutní vizuální hvězdná velikost systému je $M_\mathsf{V} = m_\mathsf{V} + 5 - 5 \log \frac{d}{\mathrm{pc}} = 4{,}21\,\mathrm{mag}$. A z toho porovnáním s absolutní hvězdnou velikostí Slunce dostáváme (zanedbáváme bolometrickou korekci)

$$M_\mathsf{V} - M_\odot = -2{,}5 \log \left(\frac{L_1 + L_2}{L_\odot} \right) \,,$$
$$L_1 + L_2 = L_\odot \cdot 10^{-0{,}4(M_\mathsf{V} - M_\odot)} \,,$$

a tedy

$$L_1 = \frac{L_\odot}{1 + (L_2/L_1)} \cdot 10^{-0{,}4 \cdot (M_\mathsf{V} - M_\odot)} \doteq 3{,}60 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W} \,,$$
$$L_2 = \frac{L_\odot}{1 + (L_1/L_2)} \cdot 10^{-0{,}4 \cdot (M_\mathsf{V} - M_\odot)} \doteq 3{,}19 \cdot 10^{26}\,\mathrm{W} \,.$$

[1] Jednotka „mas“ (milliarc-second) odpovídá jedné tisícině úhlové vteřiny.

Finále 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

d) Nakonec určete také R_1 a R_2 a to opět číselně v m.

Zde vyjdeme ze Stefanova-Boltzmannova zákona: můžeme psát

$$L_1 = 4\pi R_1^2 \sigma T_1^4 \,,$$

a tedy

$$R_1 = \sqrt{\frac{L_1}{4\pi\sigma T_1^4}} \doteq 7{,}09 \cdot 10^8 \mathrm{m} \,.$$

Obdobně pro R_2 lze psát

$$R_2 = \sqrt{\frac{L_2}{4\pi\sigma T_2^4}} \doteq 6{,}29 \cdot 10^8 \mathrm{m} \,.$$

Možná jste si všimli, že na této úloze a zejména na číslech, která nám vycházejí, je něco divného. Abychom pochopili, co se děje, zakresleme, jak náš binární systém vypadá.

e) Nakreslete, jak z pohledu pozorovatele vypadá námi zkoumaná binární soustava při maximu pozorované jasnosti. Ve vašem nákresu se pokuste zachovat poměry mezi poloměry hvězd a vzdáleností, která je dělí od sebe.

Poměr $R_1 : R_2 : a$ vychází (hodně zhruba) 9 : 8 : 23. Tedy nákres může vypadat jako ten na obrázku 4.

Aha, takže v našem systému jsou obě složky velmi blízko sebe. Nyní se budeme zabývat tím, jestli se obě složky dotýkají, tedy jestli je spojuje Rocheův lalok. Bohužel při řešení tohoto kola nemáte přístup k počítači, a tedy si soustavu nemůžete simulovat, můžeme však využít empiricky zjištěné vztahy, které dotykové binární systémy splňují. K tomu však musíme určit ještě jednu veličinu svázanou se soustavou.

f) Určete, jaký je moment hybnosti J celé soustavy v jednotkách $\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Pro jednoduchost můžete zanedbat poloměry hvězd.

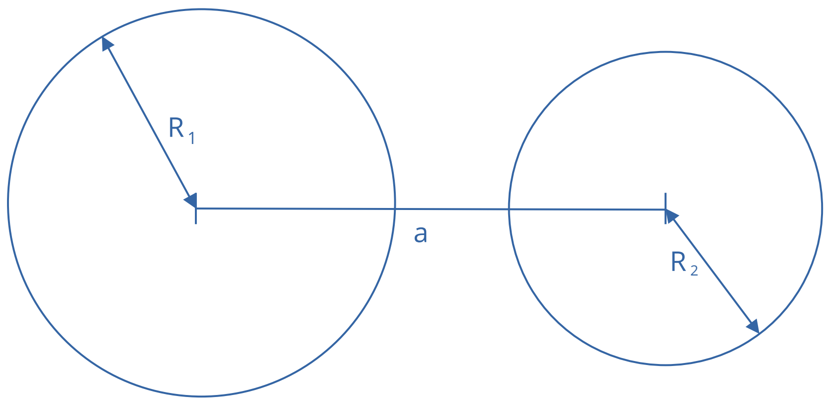
Moment hybnosti celé soustavy je roven

$$J = v_1 M_1 a_1 + v_2 M_2 a_2 \doteq 5{,}34 \cdot 10^{51}\,\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{s}^{-1} \,.$$

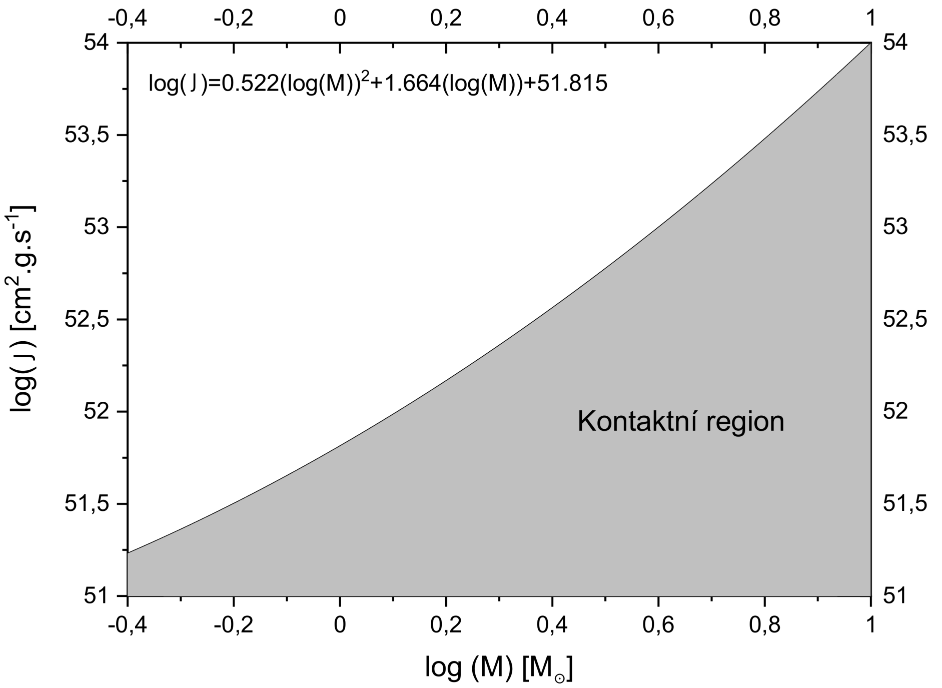
Nyní s pomocí obrázku 5 a grafů na něm lze ověřit nebo vyvrátit naši domněnku. Poznamenejme, že šedé plochy v následujících grafech odpovídají situaci, že binární systém je dotykový.

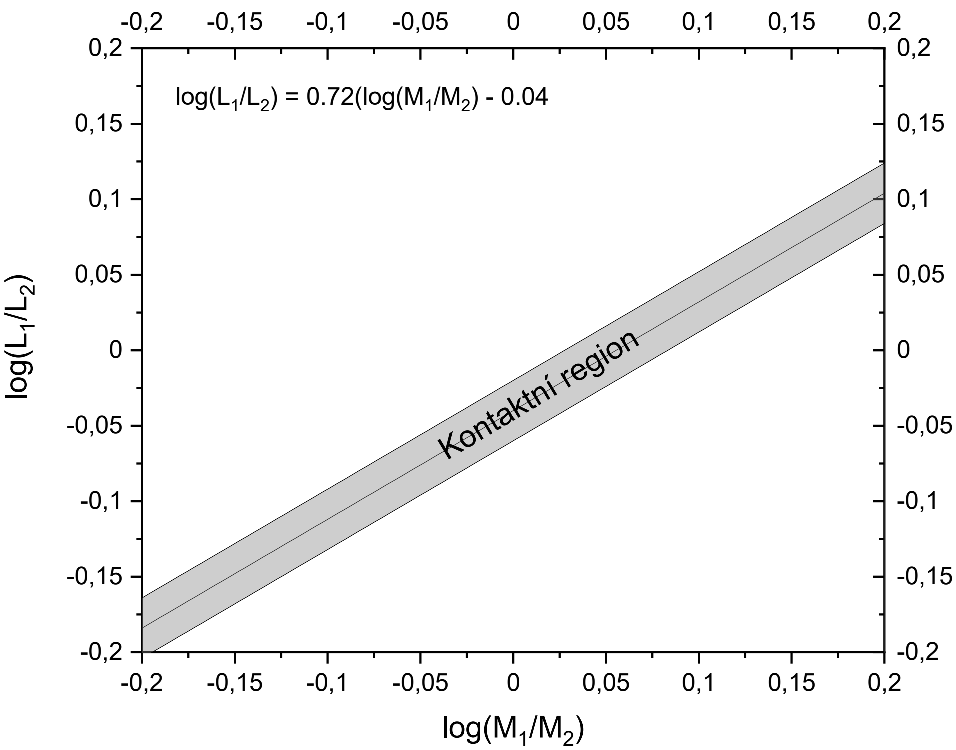
g) Na základě grafů na obrázku 5 zhodnoťte, zdali se jedná o dotykový binární systém.

Jednotlivé veličiny, které potřebujeme k porovnání s grafem, jsou $\log \frac{M_1}{M_2} \doteq 0{,}127$, $\log \frac{L_1}{L_2} \doteq 0{,}052$, $\log \frac{M}{M_\odot} \doteq 0{,}23$ a $\log \frac{J}{\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{s}^{-1}} \doteq 51{,}7$. Z čehož zakreslením do grafů zjistíme, že se obě složky dotýkají.



Obrázek 4: Znázornění rozměrů binárního systému





Obrázek 5: Empirické modely testující, jestli se složky binárního systému dotýkají (A. Poro et al., *Res. Astron. Astrophys.*, 24 (015002), 2023 a Z. Eker et al., *MNRAS*, 373 (1483), 2006).

Finále 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

F Set sail!

(max. 20 bodů)

Přesuňme se nyní do vzdálené budoucnosti, kdy bude lidstvo schopno vyrábět dostatečně lehké komponenty, aby mohlo zkoumat Sluneční soustavu pomocí vesmírných sond využívajících k pohonu slunečních plachet. Pro účel této úlohy budeme sluneční plachtu modelovat jako velmi tenkou rovinnou plochu o obsahu S, jejíž velikost budeme schopni v rámci orbity měnit. Budeme rovněž uvažovat, že materiál plachty dokonale odráží všechno dopadající záření na všech vlnových délkách. Předpokládáme-li, že je kolmice na plochu plachty orientována ve směru příchozích fotonů, působí na sondu ve směru od zdroje reaktivní síla

$$F_{\text{fot}} = \frac{2\Phi S}{c} \,,$$

kde Φ je výkon dopadajícího záření na jednotku plochy a c je rychlost světla ve vakuu.

Uvažujme sondu vybavenou slunečními plachtami, která se nachází ve vzdálenosti r od Slunce (zářivý výkon $L_\odot = 3{,}828 \cdot 10^{26}\,\text{W}$). Předpokládejme, že kolmice na plochu plachty vždy míří směrem ke Slunci.

a) Najděte obecný vztah pro sílu $F_{\text{fot}}(r)$ v závislosti na $L_\odot$, S, c a vzdálenosti r sondy od Slunce.

Dosazením $\Phi = \frac{L_\odot}{4\pi r^2}$ dostaneme

$$F_{\text{fot}} = \frac{L_\odot S}{2\pi c r^2} \,.$$

Kromě reaktivní síly záření působí na sondu rovněž gravitační síla

$$F_{\text{grav}}(r) = -\frac{G M_\odot m}{r^2} \,,$$

kde $G = 6{,}673 \cdot 10^{-11}\,\text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$ je Newtonova gravitační konstanta a $M_\odot = 1{,}989 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$ je hmotnost Slunce. Celkovou hmotnost sondy včetně plachty uvažujme $m = 1{,}000\,\text{kg}$. Celkovou sílu působící na plachtu ve směru od Slunce pak můžeme zapsat jako

$$F(r) = F_{\text{fot}}(r) + F_{\text{grav}}(r) = -\frac{\Gamma M_\odot m}{r^2} \,,$$

kde Γ je koeficient, který nezávisí na vzdálenosti r sondy od Slunce.

b) Ukažte, že pro koeficient Γ můžeme psát

$$\Gamma = G\left(1 - \frac{S}{\Sigma}\right),$$

kde $\Sigma = \frac{2\pi c G M_\odot m}{L_\odot}$. Vypočtěte číselnou hodnotu Σ v m^2.

Sečtením radiační a gravitační síly dostaneme

$$F(r) = \frac{L_\odot S}{2\pi c r^2} - \frac{G M_\odot m}{r^2} = -\frac{M_\odot m}{r^2} G\left(1 - \frac{L_\odot S}{2\pi c G M_\odot m}\right),$$

odkud vidíme, že

$$\Gamma = G\left(1 - \frac{L_\odot S}{2\pi c G M_\odot m}\right) = G\left(1 - \frac{S}{\Sigma}\right),$$

kde

$$\Sigma = \frac{2\pi c G M_\odot m}{L_\odot}\,.$$

Číselně pro naši sondu dostáváme $\Sigma \doteq 653\,\mathrm{m}^2$.

c) Za předpokladu, že se hodnota S během orbity nemění, popište kvalitativně možné tvary trajektorie sondy kolem hvězdy v případech

1. $G \geq \Gamma > 0$,
2. $\Gamma = 0$,
3. $\Gamma < 0$.

Může nastat případ $\Gamma > G$?

Jelikož je člen $\frac{S}{\Sigma}$ vždy kladný, případ $\Gamma > G$ nemůže nikdy nastat. Pokud $G \geq \Gamma > 0$, působí na sondu přitažlivá síla, která klesá se čtvercem vzdálenosti od hvězdy. Sonda se tedy bude pohybovat po kuželosečce s hvězdou v ohnisku: po kružnici či elipse v případě, že je celková mechanická energie E plachty záporná, nebo po parabole či jedné z větví hyberboly (se Sluncem v přilehlém ohnisku), pokud $E \geq 0$. Nastane-li případ $\Gamma = 0$, nebude na sondu působit žádná síla a bude se tedy pohybovat rovnoměrně přímočaře. Konečně pro $\Gamma < 0$ bude na sondu působit odpudivá síla, jejíž velikost klesá se čtvercem vzdálenosti. Sonda se tedy bude pohybovat po jedné z větví hyperboly se Sluncem v protilehlém ohnisku.

Všimněme si, že pomocí změn plochy S plachty můžeme docílit změn koeficientu Γ v průběhu letu sondy, a tedy i změn charakteru její trajektorie. Lze navíc ukázat, že i v případě měnící se hodnoty Γ bude stále zachováván *moment hybnosti* sondy

$$J = mvr\sin\alpha\,,$$

kde v je velikost její okamžité rychlosti vzhledem ke Slunci a α je úhel, který směr okamžité rychlosti svírá s průvodičem sondy (o velikosti r). Naproti tomu již nebude obecně platit zákon zachování celkové mechanické energie sondy.

d) Za předpokladu, že platí $G \geq \Gamma > 0$ (tedy $0 \leq S < \Sigma$), najděte obecný vztah pro moment hybnosti J sondy na kruhové dráze o poloměru r. Výsledek vyjádřete pomocí $\Gamma, M_\odot, m$ a r.

Pro kruhovou dráhu platí $v = \sqrt{\frac{\Gamma M_\odot}{r}}$ a $\sin\alpha = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$. Dostáváme tedy

$$J = mr\sqrt{\frac{\Gamma M_\odot}{r}} = m\sqrt{\Gamma M_\odot r}\,.$$

Letoví inženýři dostali za úkol naplánovat misi určenou k dlouhodobému průzkumu planetek hlavního pásu mezi Marsem a Jupiterem. Itinerář mise má být následující:

Finále 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

1. Sonda začíná na parkovací kruhové dráze o poloměru $r_0 = 1{,}00\,\mathrm{au}$ okolo Slunce se sluneční plachtou v kompletně zataženém stavu (tedy s plochou $S_0 = 0\,\mathrm{m}^2$).

2. Sonda v jistý okamžik $t_0 = 0{,}00\,\mathrm{y}$ velmi rychle roztáhne svoji plachtu tak, aby měla plochu S_{01}. V důsledku tohoto manévru sonda přejde na eliptickou dráhu s aféliem ve vzdálenosti $r_1 = 2{,}77\,\mathrm{au}$ od Slunce.

3. V okamžik t_1 dosažení afélia sonda opět velmi rychle změní plochu své plachty na hodnotu $S_1 > S_{01}$. Hodnotu S_1 zvolíme tak, aby sonda tímto manévrem přešla na kruhovou dráhu o poloměru r_1.

4. Sonda ihned začne velmi pomalu zmenšovat plochu plachty z hodnoty S_1 na hodnotu S_2 tak, aby její orbita byla neustále přibližně kruhová. Poloměr orbity se ale bude velmi pomalu zmenšovat. Při tomto manévru sonda prozkoumá oblast hlavního pásu planetek mezi vzdálenostmi $r_1 = 2{,}77\,\mathrm{au}$ a $r_2 = 2{,}36\,\mathrm{au}$ od Slunce.

5. Po dosažení vzdálenosti r_2 od Slunce v čase t_2 sonda svou misi ukončí.

e) Vypočtěte hodnoty ploch S_{01}, S_1 a S_2 plachty (číselně v m^2) potřebné pro uskutečnění mise.

Jelikož se sonda ve stavech s plachtou rozvinutou na plochu S_0, S_1, resp. S_2 pohybuje po kruhových drahách o poloměrech r_0, r_1, resp. r_2, můžeme psát zákon zachování momentu hybnosti ve tvaru

$$m\sqrt{G\left(1-\frac{S_0}{\Sigma}\right)M_\odot r_0} = m\sqrt{G\left(1-\frac{S_1}{\Sigma}\right)M_\odot r_1} = m\sqrt{G\left(1-\frac{S_2}{\Sigma}\right)M_\odot r_2}\,.$$

Zároveň víme, že $S_0 = 0\,\mathrm{m}^2$. Dostáváme tedy vztahy

$$r_1 = \frac{r_0}{1-\frac{S_1}{\Sigma}}\,,$$
$$r_2 = \frac{r_0}{1-\frac{S_2}{\Sigma}}\,,$$

neboli

$$S_1 = \left(1-\frac{r_0}{r_1}\right)\Sigma \doteq 417\,\mathrm{m}^2\,,$$
$$S_2 = \left(1-\frac{r_0}{r_2}\right)\Sigma \doteq 376\,\mathrm{m}^2\,.$$

Při přechodu z kruhové dráhy o poloměru r_0 na kruhovou dráhu o poloměru r_1 se sonda pohybuje po (tzv. Hohmanově) eliptické dráze o velké poloose

$$a_{01} = \frac{r_0 + r_1}{2} \doteq 1{,}89\,\mathrm{au}$$

pod vlivem přitažlivé síly s efektivní gravitační konstantou $G(1-\frac{S_{01}}{\Sigma})$. Jelikož se při roztažení plachty na plochu S_{01} zachoval moment hybnosti a tento manévr proběhl velmi rychle (tak, že se během něho vzdálenost sondy od Slunce nezměnila), musí být velikost rychlosti sondy v perihelu eliptické dráhy rovná kruhové rychlosti sondy na počáteční parkovací dráze. Máme tedy podmínku

$$\sqrt{\frac{GM_\odot}{r_0}\left(1-\frac{S_0}{\Sigma}\right)} = \sqrt{GM_\odot\left(1-\frac{S_{01}}{\Sigma}\right)\left(\frac{2}{r_0}-\frac{1}{a_{01}}\right)}\,.$$

Odtud dostaneme

$$S_{01} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{r_0}{r_1}\right)\Sigma = \frac{1}{2}S_1 \doteq 209\,\mathrm{m}^2\,.$$

f) Vypočtěte dobu $t_1 - t_0$ od začátku mise (číselně v letech), za kterou sonda přejde na kruhovou dráhu o poloměru r_1.

Doba $t_1 - t_0$ musí být rovna polovině periody oběhu sondy po eliptické dráze o velké poloose a_{01} pod vlivem přitažlivé síly s efektivní gravitační konstantou $G(1-\frac{S_{01}}{\Sigma})$. Dostáváme tedy

$$t_1 - t_0 = \pi\sqrt{\frac{a_{01}^3}{G\left[1-\frac{1}{2}(1-\frac{r_0}{r_1})\right]M_\odot}} = \frac{\pi}{2}(r_0+r_1)\sqrt{\frac{r_1}{GM_\odot}} \doteq 1{,}57\,\mathrm{y}\,.$$

Dále předpokládejme, že pro dosažení změny poloměru své dráhy z hodnoty r_1 na hodnotu r_2 mění sonda plochu plachty velmi pomalu tak, aby se 1. pohybovala s konstantním úhlovým zrychlením (které bude velmi malé), a 2. aby v časovém intervalu $t \in \langle t_1, t_2\rangle$ vykonala přesně $N = 20$ kompletních oběhů kolem Slunce.

g) Vypočtěte dobu $t_2 - t_0$ (opět číselně v letech) neboli celkovou dobu trvání mise.

Nápověda: Vzpomeňte si na vztahy pro rovnoměrně zrychlený pohyb.

V intervalu $\langle t_1, t_2\rangle$ se sonda pohybuje s konstantním úhlovým zrychlením, jehož velikost označme jako ε. Můžeme potom psát

$$\varepsilon = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1}\,,$$

kde ω_1, resp. ω_2 jsou úhlové rychlosti pohybu sondy po kruhové dráze o poloměru r_1, resp. r_2. Ze 3. Keplerova zákona můžeme pro tyto úhlové rychlosti psát vztahy

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_1^3}\left(1-\frac{S_1}{\Sigma}\right)} = \frac{1}{r_1^2}\sqrt{GM_\odot r_0}\,,$$
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{GM_\odot}{r_2^3}\left(1-\frac{S_2}{\Sigma}\right)} = \frac{1}{r_2^2}\sqrt{GM_\odot r_0}\,.$$

Zároveň ze základních kinematických vztahů vidíme, že průvodič sondy mezi časy t_1 a t_2 opíše úhel

$$\phi_{12} = \omega_1(t_2-t_1) + \frac{1}{2}\varepsilon(t_2-t_1)^2 = \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)(t_2-t_1)\,.$$

Zadání požaduje, aby byl tento úhel roven hodnotě $2\pi N$. Dostáváme tedy

$$t_2 - t_0 = t_1 - t_0 + \frac{2\phi_{12}}{\omega_1+\omega_2} = t_1 - t_0 + \frac{4\pi N}{\sqrt{GM_\odot r_0}}\frac{r_1^2 r_2^2}{r_1^2+r_2^2} \doteq 131\,\mathrm{y}\,.$$

h) Pro hodnoty $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ určete, jak se plocha plachty musí měnit v čase, aby bylo úhlové zrychlení pohybu sondy konstantní. Ve výsledné funkci $S(t)$ by jako parametry měly vystupovat pouze obsahy S_1, S_2, Σ a časy t_1, t_2.

Pro hodnoty času $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ pro úhlovou rychlost sondy platí

$$\omega(t) = \omega_1 + \varepsilon(t - t_1) = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}\omega_1 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\omega_2 \,.$$

Napíšeme-li zákon zachování momentu hybnosti ve tvaru

$$m\omega(t)r(t)^2 = m\sqrt{GM_\odot r_0}\,,$$

můžeme pro poloměr $r(t)$ dráhy sondy v závislosti na čase $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$ psát

$$r(t)^{-2} = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}\frac{\omega_1}{\sqrt{GM_\odot r_0}} + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\frac{\omega_2}{\sqrt{GM_\odot r_0}}$$

neboli

$$r(t) = \left(\frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} r_1^{-2} + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} r_2^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} .$$

Konečně vyjádříme-li velikost momentu hybnosti pro kruhovou dráhu o poloměru $r(t)$ sondy, která se pohybuje pod vlivem přitažlivé síly s efektivní gravitační konstantou $G(1 - \frac{S(t)}{\Sigma})$, dostáváme zákon zachování momentu hybnosti ve tvaru

$$m\sqrt{G\left(1 - \frac{S(t)}{\Sigma}\right)M_\odot r(t)} = m\sqrt{GM_\odot r_0}\,.$$

Po několika přímočarých úpravách dostáváme

$$1 - \frac{S(t)}{\Sigma} = \left[\frac{t_2 - t}{t_2 - t_1}\left(1 - \frac{S_1}{\Sigma}\right)^2 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}\left(1 - \frac{S_2}{\Sigma}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} .$$

Úlohu A navrhla Radka Křížová, úlohu B navrhl Marco Souza de Joode, úlohu C navrhl Lukáš Supik, úlohu D navrhl David Kománek, úlohu E navrhl David Bálek, úlohu F navrhl Jakub Vošmera.