Finále 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Analýza dat

Úlohy

G Čím hmotnější, tím zářivější

(max. 20 bodů)

Hvězdy, které se v Hertzsprungově-Russelově diagramu nacházejí na tzv. hlavní posloupnosti (mezi něž patří i naše Slunce), vykazují poměrně silnou korelaci mezi jejich hmotností M a zářivým výkonem L. Tento empirický vztah obvykle parametrizujeme jako

$$\frac{L}{L_\odot} = \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^\beta , \tag{1}$$

kde $L_\odot$ a $M_\odot$ jsou zářivý výkon a hmotnost Slunce. Hodnota parametru β může být typicky brána jako konstantní pouze v rámci jistého intervalu hodnot M. V této úloze se zaměříme na určení β pro hvězdy hlavní posloupnosti, jejichž hmotnost splňuje podmínku

$$-0{,}4 < \log \frac{M}{M_\odot} < 0{,}7 , \tag{2}$$

tedy pro hvězdy podobné našemu Slunci.

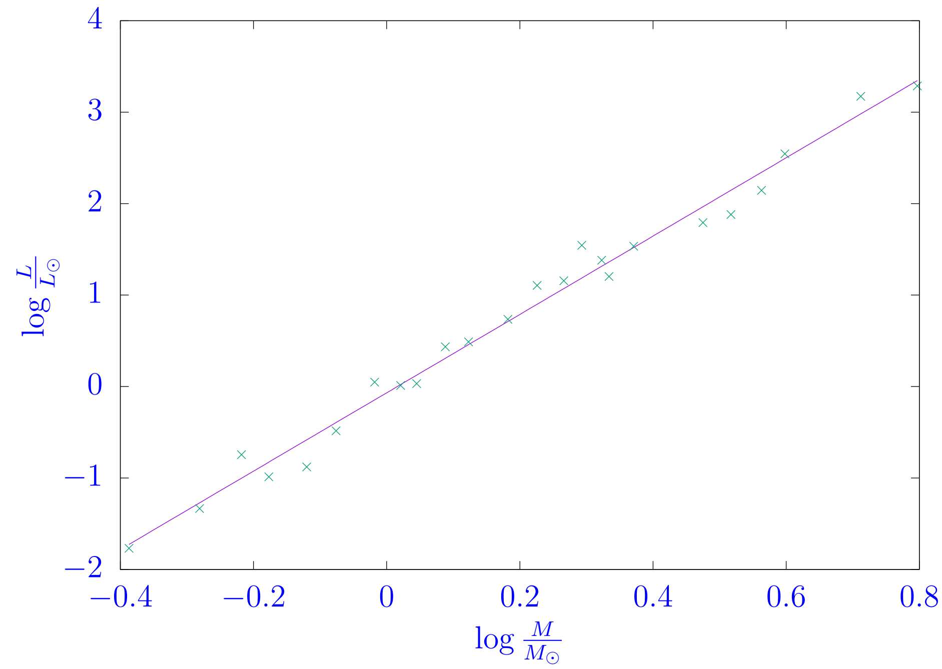
Abychom mohli zkoumat vztah hmotnost – zářivý výkon, potřebujeme spolehlivou metodu nezávislého určení obou těchto parametrů pro danou hvězdu. Ideálními systémy pro takovouto analýzu jsou bezdotykové zákrytové proměnné hvězdy, u kterých máme k dispozici spektrofotometrická data. V tabulce 1 máme k dispozici výsledky určení M a L pro 24 zákrytových proměnných hvězd, jejichž hmotnosti leží v intervalu (2).

Tabulka 1: Hmotnosti a zářivé výkony vybraných hvězd hlavní posloupnosti, které jsou zároveň složkami bezdotykových zákrytových proměnných hvězd. Zdroj: Z. Eker et al., *The Catalogue of Stellar Parameters from the Detached Double-Lined Eclipsing Binaries in the Milky Way*, PASA, 31, 2014.

$\frac{M}{M_\odot}$	$\frac{L}{L_\odot}$	$\frac{M}{M_\odot}$	$\frac{L}{L_\odot}$
0,410	0,017	1,68	12,7
0,523	0,046	1,84	14,4
0,605	0,180	1,96	35,1
0,665	0,103	2,11	24,1
0,758	0,132	2,16	16,0
0,839	0,328	2,35	34,2
0,959	1,12	2,99	62,1
1,05	1,03	3,29	76,2
1,11	1,08	3,65	140
1,22	2,72	3,97	351
1,33	3,08	5,16	1 490
1,52	5,43	6,27	1 940

a) Vyneste do grafu hodnoty $\log \frac{L}{L_\odot}$ v závislosti na $\log \frac{M}{M_\odot}$.

Finále 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 1: Graf pozorované závislosti zářivého výkonu složek zákrytových dvojhvězd na jejich hmotnosti s proloženou přímkou nejlepšího fitu.

Viz obrázek 1.

Data vynesená do grafu nyní proložíme přímkou nejlepšího fitu. Budeme tedy hledat lineární závislost ve tvaru

$$\log \frac{L}{L_\odot} = B \log \frac{M}{M_\odot} \,,$$

kde hodnotu parametru B určíme tak, aby tato závislost co nejlépe popisovala data vynesená v předchozí úloze. K tomuto použijeme tzv. *metodu nejmenších čtverců*, jejímž výsledkem je vztah

$$\overline{B} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}}$$

pro střední očekávanou hodnotu parametru B. Označíme-li jako N celkový počet datových bodů, kterými přímku prokládáme, potom hodnoty σ_{xy} a σ_{xx} vypočítáme jako[1]

$$\sigma_{xy} = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \,, \quad \sigma_{xx} = \sum_{i=1}^{N} x_i^2 \,,$$

kde (x_i, y_i) značí souřadnice jednotlivých datových bodů (tedy jednotlivé hodnoty $\log \frac{M}{M_\odot}$ a $\log \frac{L}{L_\odot}$).

b) Určete hodnoty σ_{xy} a σ_{xx}.

Dostáváme

$$\sigma_{xy} \doteq 13{,}6 \,, \qquad \sigma_{xx} \doteq 3{,}26 \,.$$

[1] Notace $\sum_{i=1}^{N} a_i$ vyjadřuje součet $a_1 + a_2 + \ldots + a_N$.

Finále 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

c) Vypočtěte střední očekávanou hodnotu $\overline{B}$.

Dostáváme $\overline{B} \doteq 4{,}18$.

d) Určete hodnotu parametru β ve vztahu (1) mezi hmotností a zářivým výkonem, která plyne z vaší analýzy dat pro 24 zákrytových proměnných hvězd (v intervalu (2) hmotnosti).

Logaritmováním vztahu hmotnost – zářivý výkon dostaneme

$$\log \frac{L}{L_\odot} = \beta \log \frac{M}{M_\odot} \,,$$

tedy $\beta = \overline{B} \doteq 4{,}18$. Celkem jsme tedy na základě dat pro 24 zákrytových proměnných hvězd určili

$$\frac{L}{L_\odot} \approx \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{4{,}18} .$$

Finále 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

H GW170817

(max. 20 bodů)

17. srpna 2017 experimenty LIGO a VIRGO detekovaly signál pocházející z dvojice obíhajících neutronových hvězd zakončený jejich kolizí. Chvíli poté pozorovaly družice Fermi a INTEGRAL gama záblesk. Z pozorování bylo možné určit přibližnou polohu zdroje na obloze, která pomohla k nalezení a následovnému pozorování pozůstatku po splynutí neutronových hvězd v galaxii NGC 4993. GW170817 vedla k mnohým vědeckým výsledkům, mimo jiné díky dostupnosti pozorování pomocí gravitačních i elektromagnetických vln. V této úloze na základě těchto měření uděláme odhad Hubbleovy konstanty, který bude nezávislý na žebříku kosmických vzdáleností.

Uvažujme dvojici obíhajících neutronových hvězd. Označme hmotnosti komponent M_1 a M_2. Při studiu signálu z gravitačních vln zavádíme parametr *chirp mass* $\mathcal{M}$, který je možné, na rozdíl od hmotností komponent, přímo určit z pozorování. Platí vztah

$$\mathcal{M} = \frac{(M_1 M_2)^{3/5}}{(M_1 + M_2)^{1/5}} \,.$$

Pro frekvenci gravitačních vln vyzařovaných obíhajícími objekty lze odvodit přibližný vztah

$$f \approx \frac{1}{\pi} \left(\frac{5}{256(t_0 - t)} \right)^{3/8} \left(\frac{c^3}{G\mathcal{M}} \right)^{5/8} , \tag{3}$$

kde t je čas, t_0 čas kolize objektů, G gravitační konstanta a c rychlost světla. Člen $t_0 - t$ tedy vyjadřuje čas do srážky.

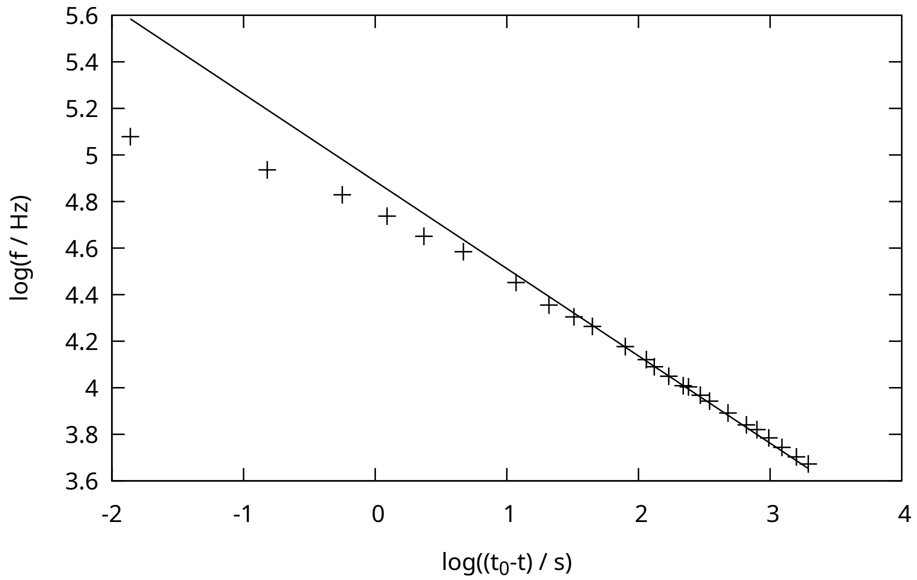
a) Vykreslete graf závislosti $\log f$ na $\log(t_0 - t)$. Hodnoty odečtěte z grafu na obrázku 3. Grafem proložte lineární funkci odpovídající logaritmu rovnice (3), stačí od oka bez výpočtu. Všimněte si, že sklon funkce je daný, stačí určit posun. Závislost je pouze přibližná a přestává platit pro časy blížící se kolizi. Prokládejte tedy jen lineární částí závislosti. Z výsledku určete hodnotu $\mathcal{M}$ v jednotkách hmotnosti Slunce.

Tabulka 2: Změřené časy $t - t_0$ a odpovídající frekvence f.

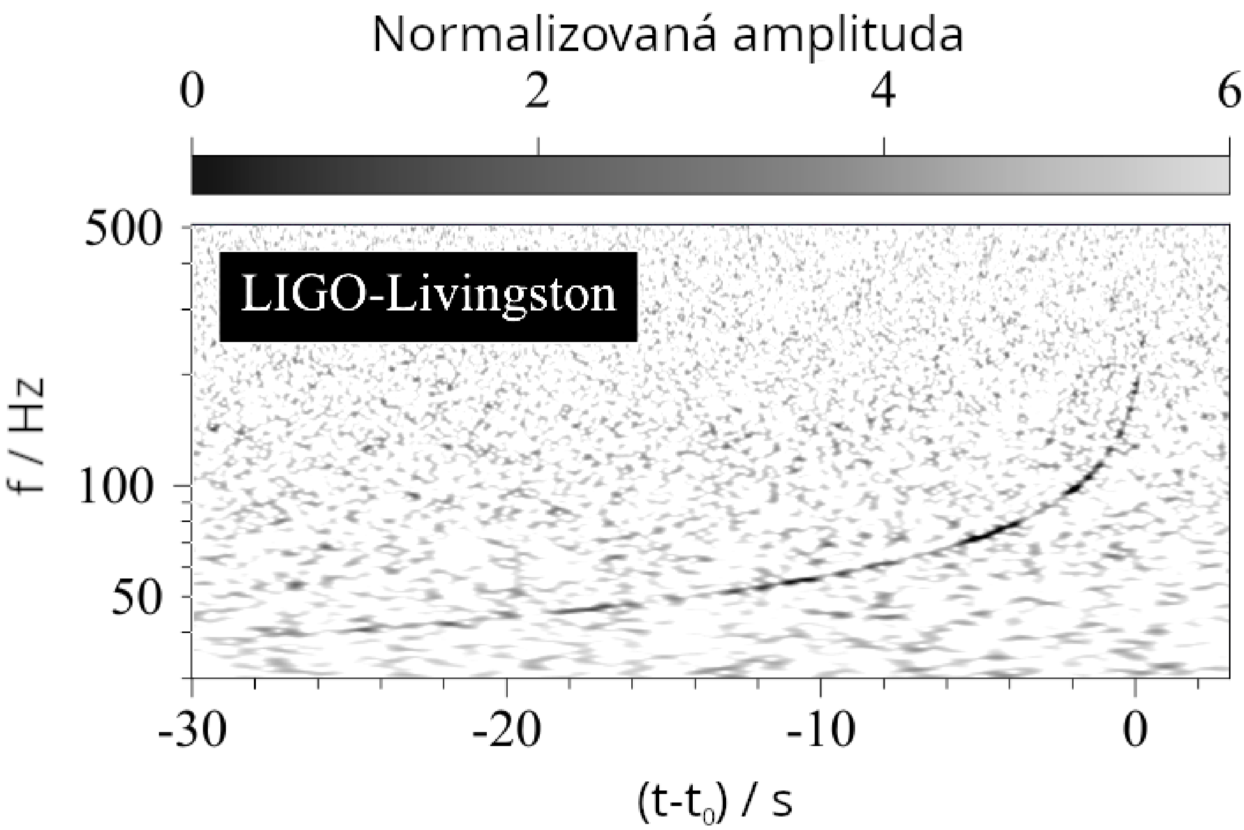
$\frac{t-t_0}{\mathrm{s}}$	$\frac{f}{\mathrm{Hz}}$	$\frac{t-t_0}{\mathrm{s}}$	$\frac{f}{\mathrm{Hz}}$	$\frac{t-t_0}{\mathrm{s}}$	$\frac{f}{\mathrm{Hz}}$	$\frac{t-t_0}{\mathrm{s}}$	$\frac{f}{\mathrm{Hz}}$
-26,8	39	-7,8	62	-14,6	49	-2,9	86
-24,4	41	-5,2	71	-12,6	52	-1,5	105
-21,9	42	-4,5	74	-11,8	53	-1,1	114
-19,9	44	-3,7	78	-10,9	55	-0,8	125
-18,1	46	-6,7	65	-10,4	55	-0,4	139
-16,8	47	-1,9	98	-9,3	57	-0,2	161

Z rovnice (3) plyne

$$\log f \approx \log \left[\frac{1}{\pi} \left(\frac{5}{256} \right)^{3/8} \left(\frac{c^3}{G\mathcal{M}} \right)^{5/8} \mathrm{s}^{-1} \right] - \frac{3}{8} \log \left(\frac{t_0 - t}{\mathrm{s}} \right) .$$



Obrázek 2: Graf závislosti $\log \frac{f}{\mathrm{Hz}}$ na $\log \frac{t_0 - t}{\mathrm{s}}$.



Obrázek 3: Spektrum signálu pozorovaného detektorem LIGO-Livingston v závislosti na čase t a frekvenci f, kde t_0 je čas srážky neutronových hvězd. Zdroj: Abbott et al. 2017.

Závislost frekvence na času do srážky je vynesena na obrázku 2. Sklon přímky je daný, fitujeme pouze posun, dostáváme hodnotu $\mathcal{M} \doteq 1{,}23\,M_\odot$.

Z hodnoty $\mathcal{M}$ nemůžeme přímo určit hmotnosti jednotlivých komponent ani celého systému. Přesto je možné spočítat minimální možnou hodnotu $M = M_1 + M_2$.

b) Ukažte, že platí následující nerovnost pro *redukovanou hmotnost*

$$\mu = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \leq \frac{M}{4}\,. \tag{4}$$

Nápověda: Hledejte extrémy funkce $\mu(q)$, kde $q = M_1/M$.

Za hmotnost jednoho z těles dosadíme do redukované hmotnosti pomocí celkové hmotnosti $M_2 = M - M_1$

$$\mu = \frac{M_1(M - M_1)}{M_1 + M - M_1} = M_1 - \frac{M_1^2}{M} = M\left(\frac{M_1}{M} - \frac{M_1^2}{M^2}\right) = M(q - q^2)\,.$$

Hodnota $q \in (0, 1)$, funkce $\mu(q)$ je parabola, protíná osu x v $q = 0$ a $q = 1$. Extrém tedy musí být v $q = 0{,}5$, kde $\mu = 0{,}25M$. Tedy $\mu \in (0; 0{,}25M)$.

c) Vyjádřete vztah mezi μ, M a $\mathcal{M}$. Spočítejte pomocí nerovnosti (4) minimální možnou hmotnost systému M_{min} (v jednotkách hmotnosti Slunce).

Nejprve vyjádříme μ pomocí M a $\mathcal{M}$

$$\mathcal{M} = \frac{(M_1 M_2)^{3/5}}{(M_1 + M_2)^{1/5}} = \frac{(\mu(M_1 + M_2))^{3/5}}{M^{1/5}} = \frac{(\mu M)^{3/5}}{M^{1/5}} = \mu^{3/5} M^{2/5}\,,$$

a tedy

$$\mu = \frac{\mathcal{M}^{5/3}}{M^{2/3}}\,.$$

Nyní využijeme nerovnosti z předchozí části, do které dosadíme za μ

$$M \geq 4\mu = 4\frac{\mathcal{M}^{5/3}}{M^{2/3}} \quad \Rightarrow \quad M^{5/3} \geq 4\mathcal{M}^{5/3}\,.$$

Nerovnost nyní umocníme

$$M \geq 4^{3/5}\mathcal{M} = M_{\mathrm{min}} \doteq 2{,}8\,M_\odot\,.$$

Dostáváme přibližně dvojnásobek Chandrasekharovy meze, což je rozumná hodnota hmotnosti dvou neutronových hvězd.

Finále 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

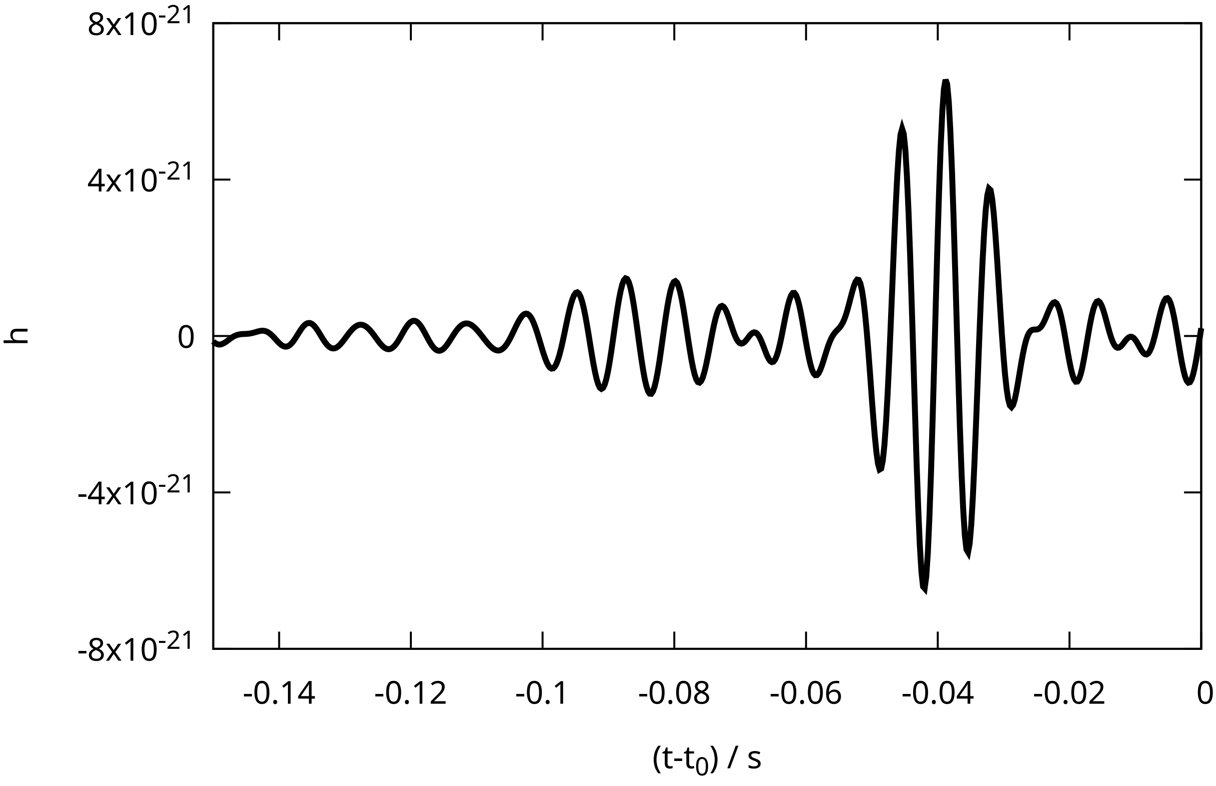
Detektory gravitačních vln měří takzvaný *gravitační strain* h. Jedná se o bezrozměrné číslo, které přibližně odpovídá změně vlastní vzdálenosti při průchodu gravitační vlny. Hodnota h klesá nepřímo úměrně první mocnině vzdálenosti od zdroje. Za předpokladu, že mají neutronové hvězdy podobnou hmotnost, závisí detekovaný výkon gravitačních vln obíhajících těles pouze na frekvenci, vzdálenosti k objektu a h. Pak lze odvodit přibližný vztah pro vzdálenost systému od pozorovatele

$$d \approx 45\,\mathrm{Gpc} \cdot \frac{10^{-21}}{h_{\mathrm{max}}} \left(\frac{\mathrm{Hz}}{f_{\mathrm{max}}} \right), \tag{5}$$

kde f_{max} je maximální změřená frekvence a h_{max} maximální strain změřený před kolizí.

d) Určete vzdálenost k GW170817 v Mpc. Maximální frekvenci f_{max} odečtěte z obrázku 3. V obrázku 4 je časová závislost signálu na detektoru LIGO, kterou použijte k určení h_{max}.

Z obrázku 3 odečteme maximální frekvenci $f_{\mathrm{max}} \doteq 180\,\mathrm{Hz}$ a z obrázku 4 maximální strain $h_{\mathrm{max}} \doteq 6{,}5 \cdot 10^{-21}$. Dosazením do rovnice 5 dostaneme vzdálenost $d \doteq 38\,\mathrm{Mpc}$.



Obrázek 4: Gravitační strain h měřený detektorem LIGO-Livingston v závislosti na čase t, kde t_0 je čas srážky neutronových hvězd. Ze surových dat byly vybrané pouze frekvence odpovídající signálu obíhajících těles.

Z polohy GW170817 víme, že k události došlo v galaxii NGC 4993, která se v době pozorování vzdalovala vůči Zemi rychlostí $v = 2\,987\,\mathrm{km \cdot s^{-1}}$.

Finále 2023/24, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

e) Určete aktuální hodnotu Hubbleova parametru („Hubbleovy konstanty“) pomocí rychlosti v a vzdálenosti d. Výsledek zapište v $\mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}$.

Rychlost v je řádově nižší než rychlost světla, můžeme použít Hubbleův zákon ve tvaru

$$v \approx H_0 d\,.$$

Nyní již snadno vyjádříme

$$H_0 \approx 78\,\mathrm{km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}}\,.$$

Úlohu G navrhl Jakub Vošmera, úlohu H navrhl David Kománek.