Finále 2018/19, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Analýza dat

Úlohy

G Výhled z okna

(max. 20 bodů)

Astronom na neznámém místě na Zemi byl častým svědkem západu Slunce, který mohl pozorovat z okna svého pokoje. Pokoj byl vybaven oknem o rozměrech 1,5 × 1,5 m a malým laserovým ukazovátkem umístěným ve vodorovné rovině spodní hrany okna a vzdáleným 1 m od středu spodní hrany. Během jarní rovnodennosti se astronom rozhodl zaznamenávat trajektorii Slunce. To prováděl tak, že každých 20 min namířil ukazovátko na střed disku Slunce a zaznamenal polohu laserového bodu na okně. Následně si zvolil počátek svého souřadnicového systému v levém dolním rohu okna a změřil souřadnice x a y každého zaznamenaného bodu. Naměřená data jsou v Tabulce 1. V celé úloze zanedbejte vliv refrakce.

Nápověda: Při řešení úlohy se vám může hodit, že

$$\cos\Delta = \sin h_1 \sin h_2 + \cos h_1 \cos h_2 \cos(A_2 - A_1)\,,$$

kde Δ je úhlová vzdálenost mezi dvěma objekty na obloze, h_1, h_2 jsou jejich výšky nad obzorem a A_1, A_2 jsou jejich azimuty, a že

$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos A\,,$$

kde δ je deklinace objektu, h a A jsou jeho obzorníkové souřadnice a φ je zeměpisná šířka pozorovatele.

Tabulka 1: Poloha Slunce v závislosti na čase

Čas (UT)	$\frac{x}{\mathrm{cm}}$	$\frac{y}{\mathrm{cm}}$	Čas (UT)	$\frac{x}{\mathrm{cm}}$	$\frac{y}{\mathrm{cm}}$
14:00	66,5	54,3	15:40	104,6	26,2
14:20	74,2	48,9	16:00	114,3	21,8
14:40	79,8	42,1	16:20	120,1	14,5
15:00	90,1	38,3	16:40	130,2	9,1
15:20	96,5	32,0	17:00	138,8	3,1

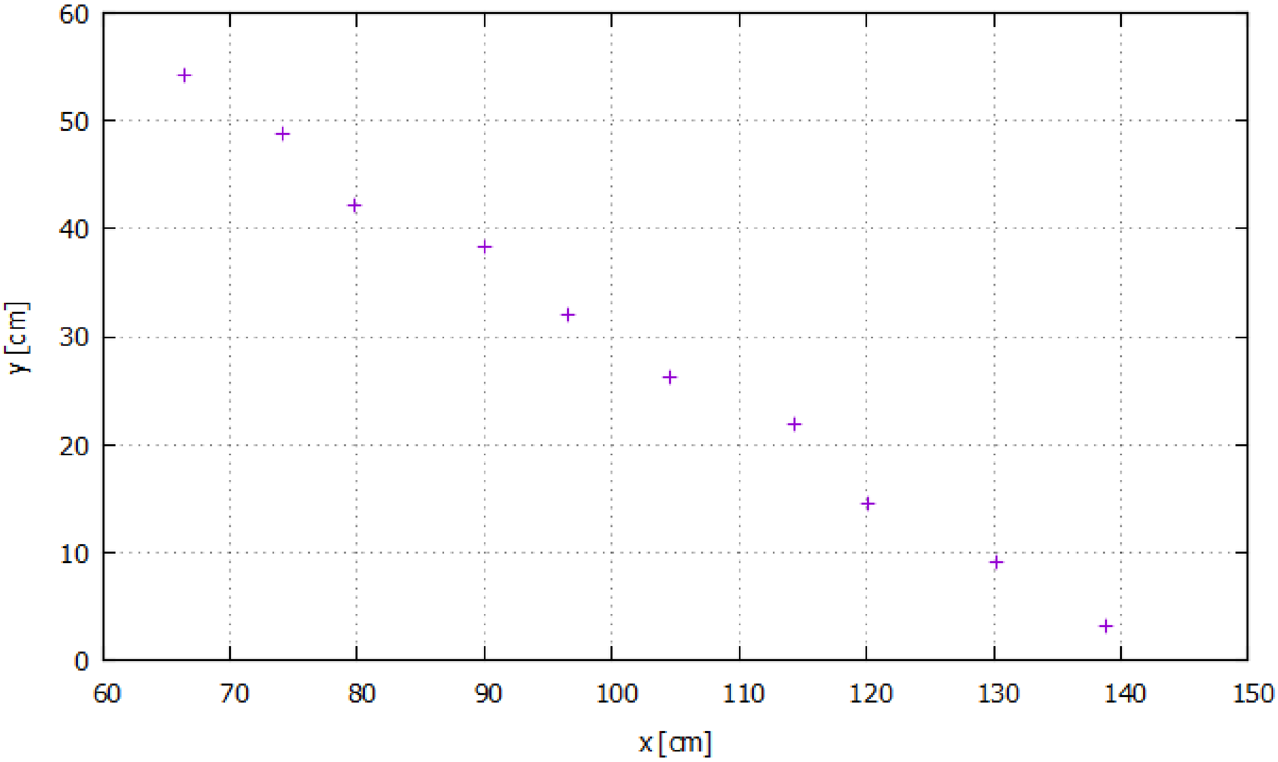
a) Na příslušné milimetrové pole v odpovědním archu vykreslete jednotlivé polohy Slunce v souřadnicovém systému $[x, y]$.

Viz Obrázek 1.

b) Odhadněte čas t_z (UT) a vodorovnou souřadnici x_z (v cm) západu Slunce.

Proložíme-li jednotlivé polohy Slunce křivkou, vychází nám zhruba poloha $x_z = 143\,\mathrm{cm}$. Čas odhadneme z klesajícího trendu souřadnice y v čase, z čehož nám vychází přibližný čas západu 17:10 UT.

c) Pro každou zaznamenanou polohu Slunce spočítejte výšku h nad obzorem ve stupních. Výsledky zaneste do příslušné tabulky v odpovědním archu.



Obrázek 1: Polohy Slunce v souřadnicovém systému $[x, y]$.

Výšku nad obzorem umíme spočítat pomocí základních goniometrických funkcí. Protilehlou stranou je souřadnice y, přilehlá strana je vzdálenost ukazovátka od kolmého průmětu zaznamenané polohy na spodní hranu okna.

$$\operatorname{tg} h = \frac{y}{d} \qquad \Longrightarrow \qquad h = \operatorname{arctg} \frac{y}{d} = \frac{y}{\sqrt{(1\,\mathrm{m})^2 + (x - 0{,}75\,\mathrm{m})^2}}\,.$$

Viz Tabulka 2.

d) Pro každou zaznamenanou polohu Slunce spočítejte odpovídající azimut A. Využijte k tomu váš odhad z části b). Výsledky zaneste do příslušné tabulky v odpovědním archu.

Protože převádíme rovinné souřadnice na sférické, nepočítáme azimut jako rozdíl úhlů kolmých průmětů na spodní hranu okna, jak by se mohlo na první pohled znát. Azimutální kružnice totiž nejsou rovnoběžné, stačí si představit nekonečně vysoké okno. Proto použijeme první rovnici z nápovědy, ze které určíme azimut pomocí výšky h vypočtené v bodě c), a úhlové vzdálenosti dvou bodů Δ. Jako jeden z bodů vezmeme bod západu Slunce z části b), u něhož známe všechny 4 souřadnice: $x = 1{,}43\,\mathrm{m}$, $y = 0\,\mathrm{m}$, $h = 0°$, $A = 90°$. Potom máme

$$\sin A = \frac{\cos \Delta}{\cos h}\,,$$

kde Δ spočítáme z kosinové věty jako

$$\cos \Delta = \frac{l^2 + d_0^2 - c^2}{2 l d_0}\,,$$

kde l je vzdálenost od ukazovátka k bodu na okně, tedy

$$l = \sqrt{y^2 + (1\,\mathrm{m})^2 + (x - 0{,}75\,\mathrm{m})^2}\,,$$

d_0 je vzdálenost od ukazovátka k bodu západu Slunce, tedy

$$d_0 = \sqrt{(1\,\mathrm{m})^2 + (1{,}43\,\mathrm{m} - 0{,}75\,\mathrm{m})^2} \doteq 1{,}209\,3\,\mathrm{m}$$

a c je vzdálenost těchto dvou bodů na okně, tedy

$$c = \sqrt{y^2 + (x - 1{,}43\,\mathrm{m})^2}\,.$$

Po dosazení do kosinové věty dostáváme

$$\cos\Delta = \frac{1{,}36\,x + 0{,}98\,\mathrm{m}}{2{,}418\,6\,l}\,.$$

Výsledky pro h a A jsou shrnuty v Tabulce 2.

Tabulka 2: Výsledky pro h a A.

Čas (UT)	$\frac{h}{\mathrm{deg}}$	$\frac{l}{\mathrm{m}}$	$\frac{\Delta}{\mathrm{deg}}$	$\frac{A}{\mathrm{deg}}$	$\frac{\varphi}{\mathrm{deg}}$
14:00	28,42	1,141	46,9	50,9	49,4
14:20	26,06	1,113	42,4	55,3	49,3
14:40	22,81	1,086	38,2	58,5	51,1
15:00	20,74	1,081	32,5	64,4	48,8
15:20	17,37	1,072	27,8	67,9	50,2
15:40	14,10	1,075	22,5	72,3	50,5
16:00	11,47	1,096	17,1	77,2	47,4
16:20	7,53	1,107	12,4	80,1	52,6
16:40	4,56	1,146	7,0	84,7	49,3
17:00	1,50	1,187	2,3	88,3	48,3

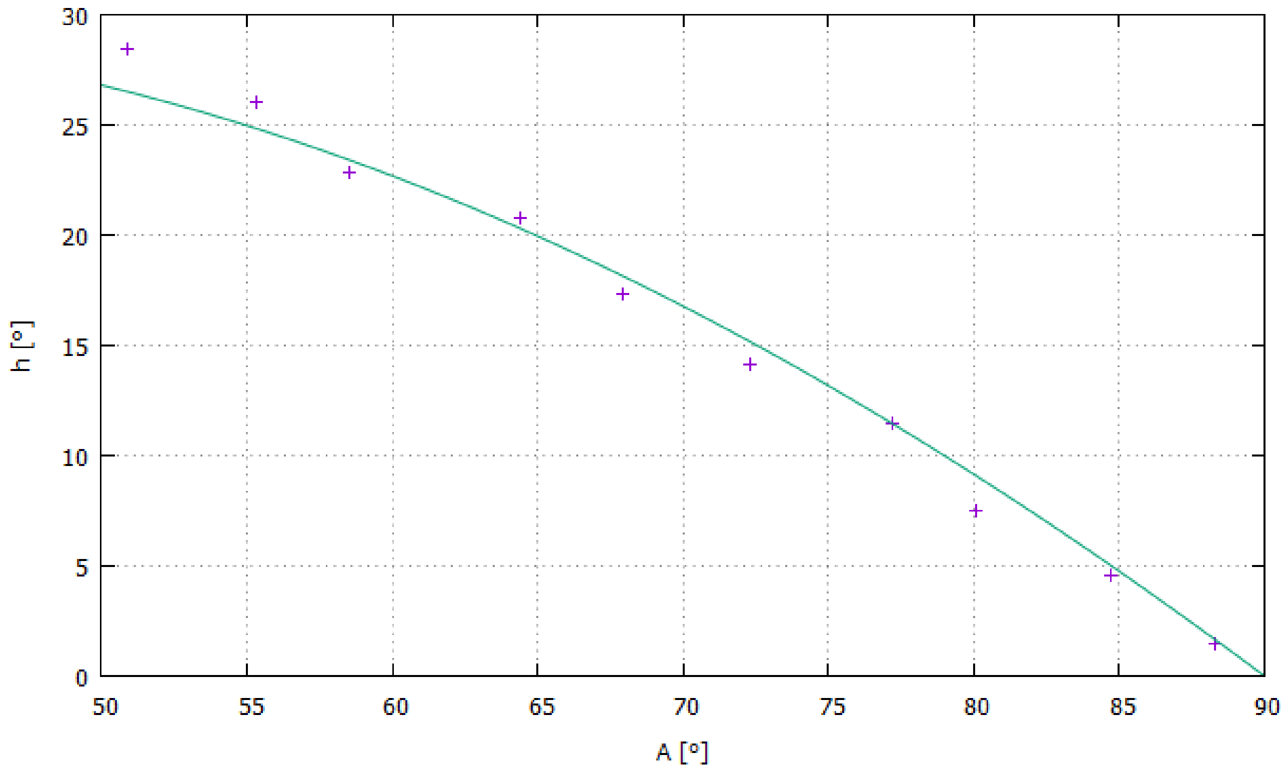
e) Vykreslete jednotlivé polohy Slunce v souřadnicovém systému $[h, A]$. Body proložte vhodnou křivkou.

Viz Obrázek 2.

f) Určete zeměpisnou šířku φ a zeměpisnou délku λ pozorovatele. Časová rovnice má poblíž jarní rovnodennosti hodnotu přibližně $-7\,\mathrm{min}$.

Pro určení zeměpisné šířky φ využijeme druhou rovnici z nápovědy. Protože v den jarní rovnodennosti je $\delta = 0°$, můžeme rovnici upravit na tvar

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\cos A}{\mathrm{tg}\,h}\,.$$



Obrázek 2: Polohy Slunce v souřadnicovém systému $[h, A]$.

Výsledky jsou po dosazení příslušných hodnot v Tabulce 2. Zeměpisnou šířku φ tak určíme jako průměr výsledných hodnot. Dostáváme $\varphi \doteq (49{,}7 \pm 0{,}5)°$ s.š. Zeměpisnou délku λ určíme z času západu Slunce. Na 0° z.d. by Slunce během rovnodennosti zapadalo v 18:00 místního slunečního času, tedy v 18:07 UT (střední sluneční čas pro 0° z.d.). Protože Slunce zapadlo dřív, nacházíme se na východní polokouli. Zeměpisnou délku potom spočteme jako

$$\lambda = (18{:}07 - 17{:}10) \cdot 15° \doteq 14{,}25°\ \text{v.d.}$$

Poloha pozorovatele tak odpovídá oblasti v okolí Dobříše.

H Vesmírná morseovka

(max. 20 bodů)

Fotometrická měření tranzitů exoplanet hrají velkou roli při jejich objevování. Světelné křivky bývají často prvním vodítkem ke zdárnému objevu. Vaším úkolem bude složit světelnou křivku hvězdy WASP-47 pomocí měření z několika různých period. K dispozici máte naměřené hodnoty světelného toku F normované na referenční hodnotu F_0. Po zjištění tranzitu byla provedena spektrografická měření hvězdy, která potvrdila přítomnost exoplanety: astronomové naměřili periodu radiální rychlosti $P = 4{,}16\,\mathrm{d}$ a amplitudu radiální rychlosti $v_\mathrm{r} = 140\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Poloměr hvězdy je $R_* = 1{,}16\,R_\odot$.

Tabulka 3: Data získaná fotometrickým pozorováním hvězdy WASP-47.

HJD	F/F_0	HJD	F/F_0
2149,84421	1,0003	2175,46567	0,9997
2149,90551	0,9977	2179,12292	0,9987
2149,94637	0,9884	2182,57585	0,9998
2149,98724	0,9874	2183,18880	0,9934
2150,02810	0,9900	2183,22966	0,9874
2151,00884	1,0000	2185,70188	0,9998
2151,96914	1,0000	2187,39769	0,9874
2154,09406	0,9887	2187,62244	1,0000
2154,87048	0,9998	2189,54300	0,9998
2156,81151	0,9998	2191,52486	0,9889
2158,36433	0,9964	2191,58616	0,9876
2157,83310	0,9994	2191,62702	0,9918
2159,87628	0,9996	2194,69175	1,0002
2161,93989	0,9996	2195,71332	0,9878
2162,40983	0,9887	2196,87792	1,0006
2166,57790	0,9880	2199,08453	1,0004
2170,72553	0,9890	2199,88136	0,9875
2170,86855	0,9996	2200,16740	1,0002
2174,89358	0,9949	2212,32421	0,9881
2174,97531	0,9885	2212,40593	0,9937

Finále 2018/19, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

a) Pro každé měření vypočtěte fázi oběhu exoplanety (zlomek oběžné periody pro daný čas; nabývá hodnot od 0 do 1). Jako okamžik nulové fáze berte čas HJD = 0. Výsledky zaneste do příslušné tabulky v odpovědním archu.

Viz tabulka 4.

Tabulka 4: Vypočítané hodnoty fáze pro jednotlivá pozorování.

HJD	F/F_0	Fáze	HJD	F/F_0	Fáze
2149,84421	1,0003	0,789	2175,46567	0,9997	0,948
2149,90551	0,9977	0,804	2179,12292	0,9987	0,828
2149,94637	0,9884	0,814	2182,57585	0,9998	0,658
2149,98724	0,9874	0,824	2183,18880	0,9934	0,805
2150,02810	0,9900	0,834	2183,22966	0,9874	0,815
2151,00884	1,0000	0,069	2185,70188	0,9998	0,409
2151,96914	1,0000	0,300	2187,39769	0,9874	0,817
2154,09406	0,9887	0,811	2187,62244	1,0000	0,871
2154,87048	0,9998	0,998	2189,54300	0,9998	0,332
2156,81151	0,9998	0,464	2191,52486	0,9889	0,809
2158,36433	0,9964	0,838	2191,58616	0,9876	0,824
2157,83310	0,9994	0,710	2191,62702	0,9918	0,833
2159,87628	0,9996	0,201	2194,69175	1,0002	0,570
2161,93989	0,9996	0,697	2195,71332	0,9878	0,816
2162,40983	0,9887	0,810	2196,87792	1,0006	0,096
2166,57790	0,9880	0,812	2199,08453	1,0004	0,626
2170,72553	0,9890	0,809	2199,88136	0,9875	0,818
2170,86855	0,9996	0,843	2200,16740	1,0002	0,886
2174,89358	0,9949	0,811	2212,32421	0,9881	0,809
2174,97531	0,9885	0,831	2212,40593	0,9937	0,828

b) Na příslušné milimetrové pole v odpovědním archu nakreslete světelnou křivku, tedy graf normovaného světelného toku F/F_0 v závislosti na fázi.

Graf je na obrázku 3.

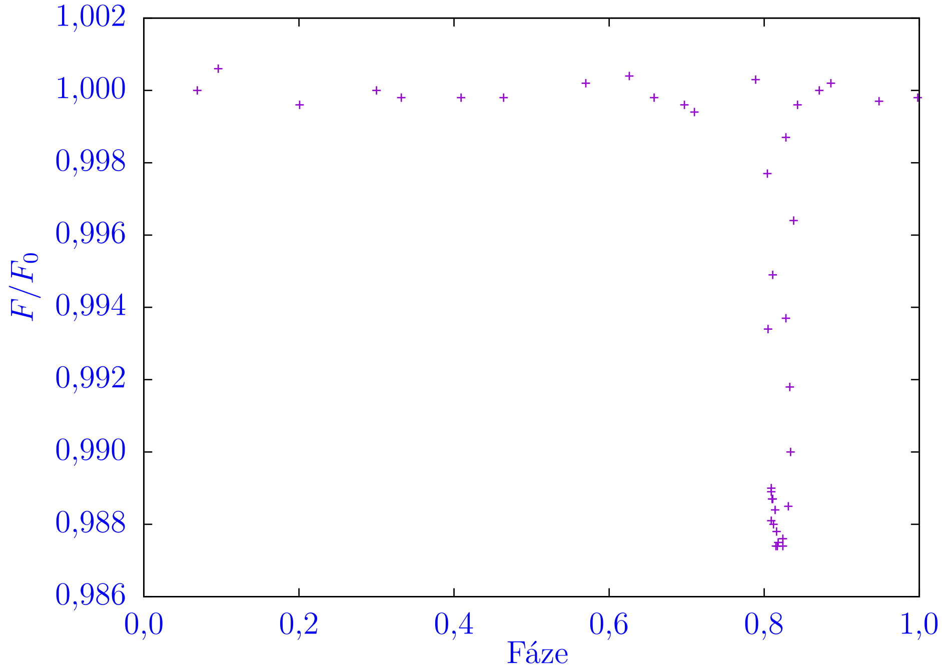
c) Z grafu určete hloubku $\Delta F/F_0$ tranzitu a délku ΔT trvání tranzitu.

Hloubka tranzitu je $\frac{\Delta F}{F_0} \doteq 0{,}0125$. Doba tranzitu je $\Delta T \doteq 0{,}035\,P \doteq 3{,}5\,\mathrm{h}$.

d) Vypočítejte oběžnou rychlost v (v $\mathrm{km\cdot s^{-1}}$) planety okolo hvězdy. Předpokládejte, že planeta obíhá hvězdu po kružnici a že při tranzitu prochází z našeho pohledu středem disku hvězdy.

Tranzit trvá od prvního po poslední dotek, planeta tedy musí za dobu ΔT urazit dráhu $2R_\mathrm{p} + 2R_*$, kde R_p jsme označili poloměr planety. Ten získáme z hloubky zákrytu pomocí vztahu $(R_\mathrm{p}/R_*)^2 = \Delta F/F_0$. Rychlost v tedy spočteme jako

$$v = \frac{2R_*\left(1 + \sqrt{\frac{\Delta F}{F_0}}\right)}{\Delta T} \doteq 142\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}\,.$$



Obrázek 3: Světelná křivka vzniklá složením dat z několika period

e) Určete hmotnost M_* hvězdy v jednotkách hmotnosti Slunce $M_\odot$ a hmotnost M_p exoplanety v jednotkách hmotnosti Jupitera M_J.

Pro poloměr oběžné dráhy planety r platí $r = vP/(2\pi)$. Z 3. Keplerova zákona víme $r^3 = P^2(GM/4\pi^2)$, odkud vyjádříme celkovou hmotnost soustavy $M = 4\pi r^3/(GP^2)$. Pro hmotnosti složek potom platí $M = M_* + M_\mathrm{p}$ a $M_* r_* = M_\mathrm{p} r_\mathrm{p}$, a tedy $M_* v_\mathrm{r} = M_\mathrm{p} v$. Odtud $M_* = Mv/(v_\mathrm{r} + v) \doteq 1{,}23\,M_\odot$ a $M_\mathrm{p} = Mv_\mathrm{r}/(v_\mathrm{r} + v) \doteq 1{,}28\,M_\mathrm{J}$.