Finále 2023/24, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

A Přehledový test

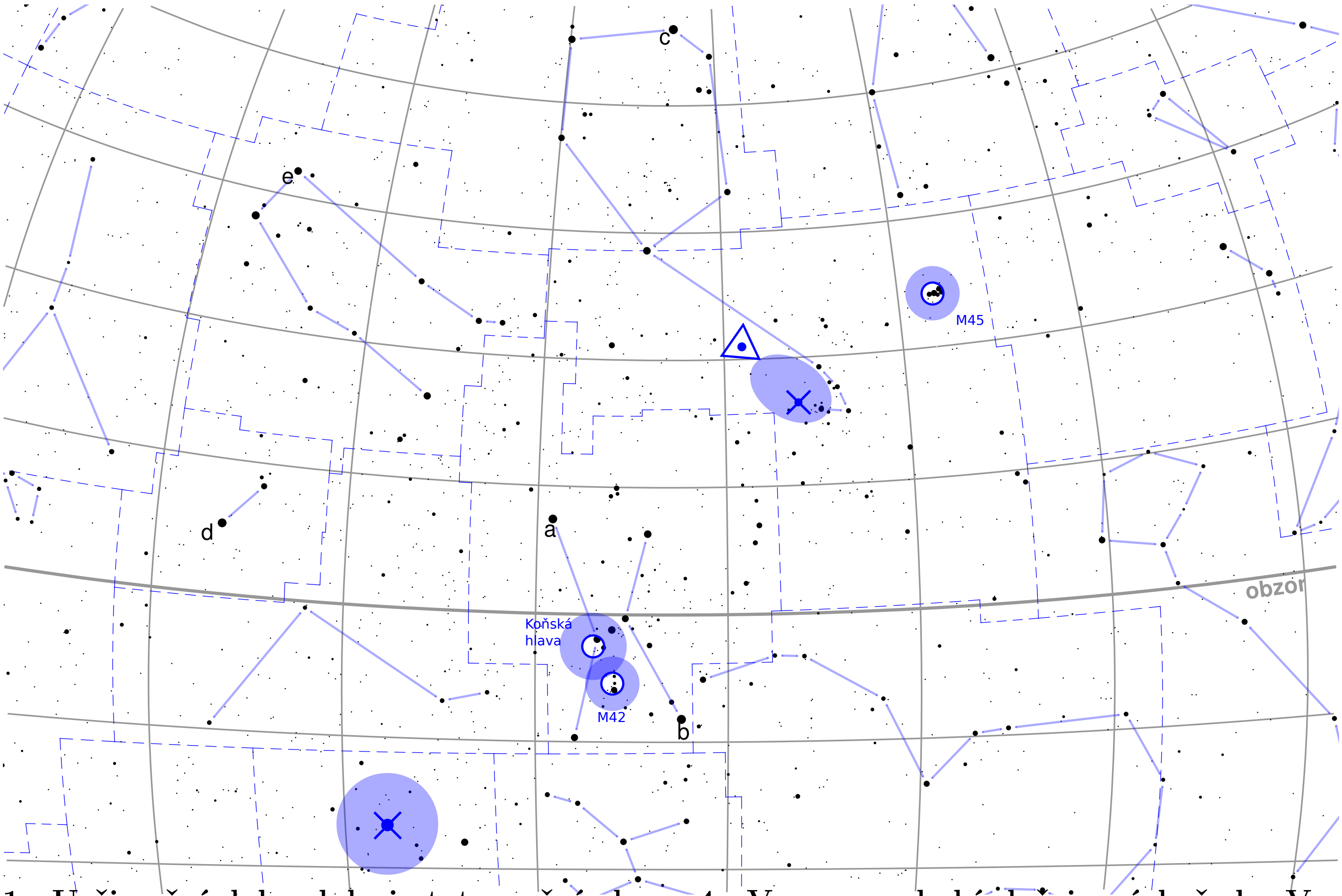
(max. 30 bodů)

POKYNY: U každé otázky **zakroužkuj právě jednu** odpověď. Za správnou odpověď je 1 bod. Pokud se chceš opravit, původní odpověď zřetelně škrtni a zakroužkuj jinou možnost. V případě špatné, žádné, nebo nezřetelné odpovědi je za otázku 0 bodů.

Finále 2023/24, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

B Slepá mapa oblohy

(max. 15 bodů)



1. Urči roční dobu, kdy je tato noční obloha nejlépe vidět.

   v zimě

2. Pojmenuj hvězdy označené „a“ až „e“:

[a] Betelgeuse/Betelgeuze

[b] Rigel

[c] Capella/Capela

[d] Procyon/Prokyon

[e] Castor/Kastor

3. Zakroužkuj a označ M42, M45 a mlhovinu Koňská hlava.
4. V mapce chybí dvě jasné hvězdy. Vyznač jejich polohy křížkem.
5. V mapce přebývá jedna jasná hvězda. Udělej okolo ní trojúhelník.
6. Napiš české názvy libovolných pěti souhvězdí, která jsou na mapce alespoň částečně vidět.

   Kompas, Lodní záď, Velký pes, Zajíc, Eridanus, Velryba, Hydra, Malý pes, Jednorožec, Orion, Býk, Beran, Ryby, Rak, Blíženci, Vozka, Perseus, Trojúhelník, Andromeda, Rys

7. Urči zeměpisnou šířku pozorovatele. Na mapce je vyobrazena mřížka jeho obzorníkových souřadnic.

   $\pm 90°$

Finále 2023/24, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

C Odvození Hubbleovy–Lemaîtreovy konstanty

(max. 15 bodů)

V roce 1927 publikoval Georges Lemaître teoretickou práci, ve které ukázal, že se vesmír rozpíná. O dva roky později Edwin Hubble vydal článek, kde rychlost rozpínání vesmíru změřil a spočítal. Rychlost rozpínání vesmíru není klasickou rychlostí, ale představuje koeficient vyjadřující, jak moc roste rychlost vzdalování galaxií s jejich rostoucí vzdáleností od Země. Odtud také plynou její jednotky, kterou jsou km/s/Mpc (kilometry za sekundu na megaparsek), vyjadřující, o kolik km/s vzroste rychlost vzdalování galaxií na každém dalším Mpc od nás. Označuje se h, nazývá se Hubbleova-Lemaîtreova konstanta a lze ji spočítat jako $h = v/r$, kde v je rychlost vzdalování galaxie, která je od nás ve vzdálenosti r.

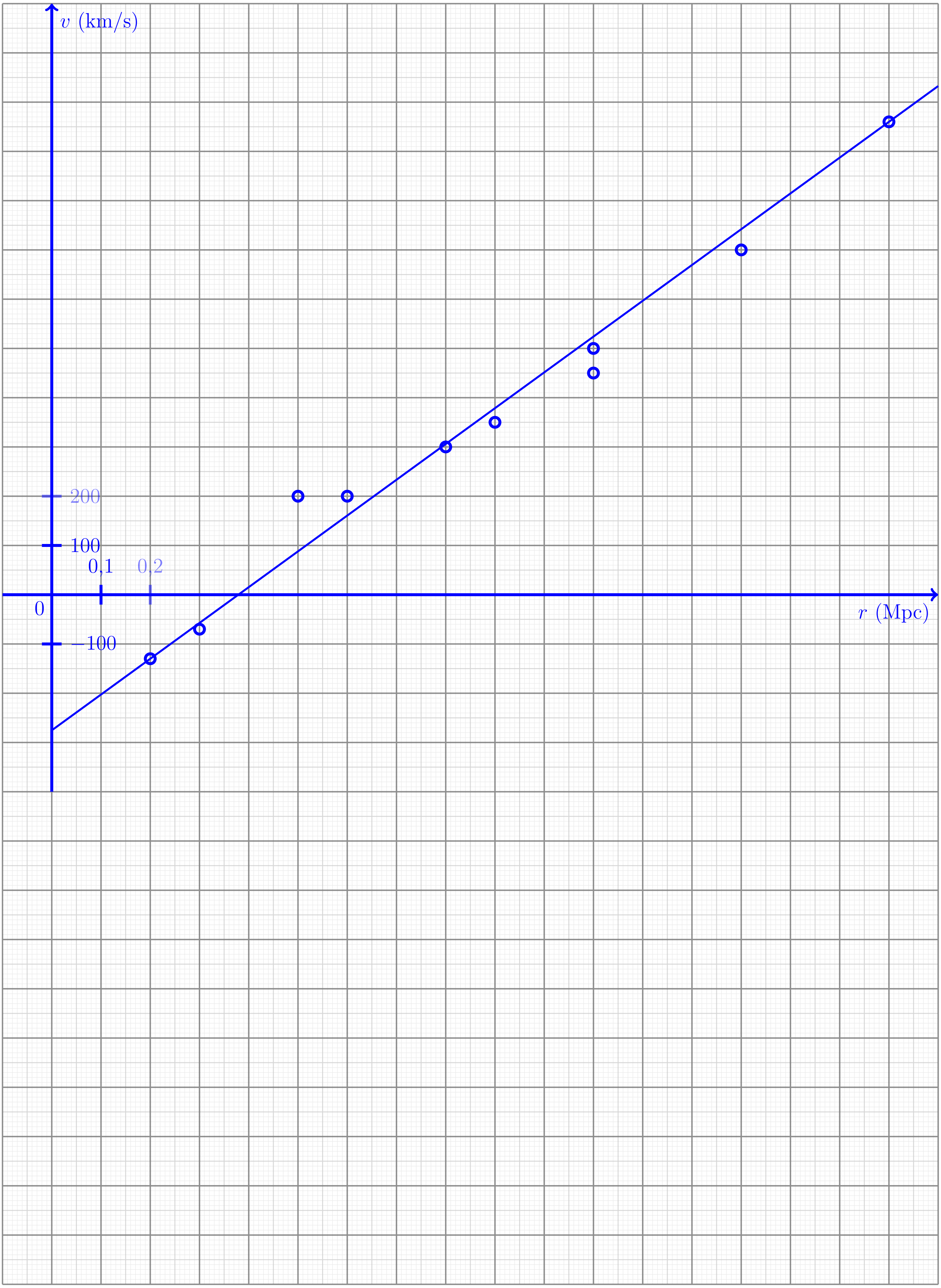
V tomto příkladu se tedy vydáme po stopách Hubblea a zkusíme si rychlost rozpínání vesmíru také určit. V Tabulce 1 jsou naměřené hodnoty vzdáleností k deseti objektům z katalogu NGC (*New General Catalogue*) a jejich rychlosti vzdalování (nebo přibližování).

objekt	**vzdálenost** r (Mpc)	**rychlost** v (km/s)
NGC 6822	0,2	−130
NGC 598	0,3	−70
NGC 5457	0,5	200
NGC 4449	0,6	200
NGC 4214	0,8	300
NGC 5236	0,9	350
NGC 5055	1,1	450
NGC 7331	1,1	500
NGC 4258	1,4	700
NGC 4151	1,7	960

Tabulka 1: Měření, která ve svém článku z roku 1929 použil E. Hubble.

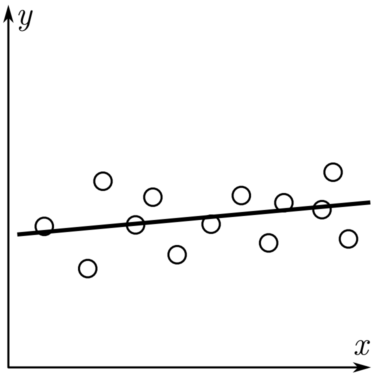
a) S využitím milimetrového papíru zakresli vzdálenosti (na osu x) a rychlosti (na osu y) z tabulky 1 v měřítku: 1 cm = 0,1 Mpc a 1 cm = 100 km/s. Nezapomeň popsat osy.

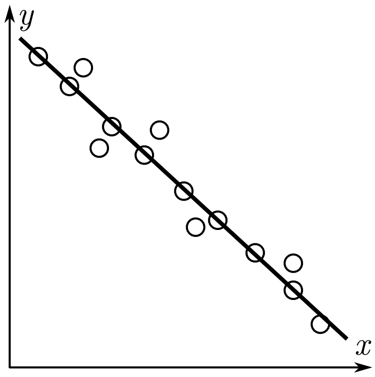
b) Skrze body ve svém grafu prolož přímku, která bude symbolizovat průměrnou hodnotu rozpínání vesmíru v různých vzdálenostech. Všechny body v grafu sice neleží na jedné přímce, ale tvým úkolem je najít takovou přímku, která bude od všech bodů co nejméně vzdálená. Pak změř její sklon, tj. úhel, který tato přímka svírá s vodorovnou osou. Označ ho θ a jeho velikost uveď zaokrouhlenou na stupně.


v (km/s)
200
100
0,1
0,2
0
−100
r (Mpc)

$\theta = 36°$

Nápověda: To, jak může vypadat proložení přímky v ***jiných*** *grafech, je ukázáno na dvou příkladech na obrázcích vpravo.*





c) Průměrnou rychlost rozpínání vesmíru lze z grafu vypočítat jako $h = \mathrm{tg}\,\theta$. Uveď ji v jednotkách $\mathrm{km/s}/\mathrm{Mpc}$ a zaokrouhli na celé číslo. *Nápověda: Pozor ale na jednotky, graf má zvláštní měřítko.*

Rychlost rozpínání vesmíru odpovídá sklonu přímky v grafu, tedy $\mathrm{tg}\,(36°) = 0{,}727$. Dostali jsme ji ale v jednotkách, které byly na osách. Je proto nutné je převést.

$$h = 0{,}727 \cdot \frac{100\,\mathrm{km/s}}{0{,}1\,\mathrm{Mpc}} = 727\,\mathrm{km/s/Mpc}\,.$$

d) Dnešní hodnota Hubbleovy–Lemaîtreovy konstanty je 68 km/s/Mpc, což by mělo být jiné číslo, než jaké ti vyšlo. Hubble ve svých měřeních vzdáleností i rychlostí totiž udělal chyby. Spočítej, kolikrát větší/menší je skutečná hodnota h oproti té, která ti vyšla, a napiš slovní odpověď.

$727/68 \approx 10{,}7$. Vyšla nám asi 10,7krát větší hodnota než skutečná.

e) Aktualizované hodnoty pro dvě galaxie z Hubbleova výběru jsou v tabulce 2 níže. Přepočítej pomocí nich h. Výsledek uveď v $\mathrm{km/s}/\mathrm{Mpc}$ a zaokrouhli na desetiny. Je už toto číslo bližší skutečné hodnotě?

objekt	**vzdálenost** r (Mpc)	**rychlost** v (km/s)
NGC 7331	12,2	816
NGC 4258	7,00	448

Tabulka 2: Dnešní hodnoty pro dvě galaxie z tabulky 1.

Využitím vzorečku z úvodního odstavce ($h = v/r$) vypočítáme průměrnou hodnotu h z NGC 7331 a NGC 4258.

$$h = \frac{816\,\mathrm{km/s} - 448\,\mathrm{km/s}}{12{,}2\,\mathrm{Mpc} - 7{,}00\,\mathrm{Mpc}} = \frac{368\,\mathrm{km/s}}{5{,}20\,\mathrm{Mpc}} = 70{,}8\,\mathrm{km/s/Mpc}\,.$$

Ano, toto číslo je bližší skutečné hodnotě.

Finále 2023/24, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

D Testování dalekohledu

(max. 20 bodů)

Lenka a Jakub si s sebou na dovolenou do Karibiku vzali jejich nový astronomický dalekohled. Chtěli ho otestovat, ale protože bylo několik dní zataženo, rozhodli se jeden večer místo oblohy pozorovat dva zdroje světla umístěné na vrcholu stožáru zaoceánské lodě, která zrovna v dáli proplouvala. Jejich dalekohled Newtonova typu má průměr primárního zrcadla $D = 15\,\mathrm{cm}$, ohniskovou vzdálenost $f_0 = 1\,200\,\mathrm{mm}$ a k dispozici mají dva okuláry s ohniskovými vzdálenostmi $f_1 = 20\,\mathrm{mm}$ a $f_2 = 40\,\mathrm{mm}$.

a) Který z okulárů musí použít, aby dosáhli maximálního zvětšení? Vypočti číselně hodnotu Z tohoto zvětšení.

Zvětšení Z dalekohledu vypočteme jako ohniskovou vzdálenost objektivu f_0 dělenou ohniskovou vzdáleností okuláru ($Z = f_0/f_{\mathrm{okular}}$). Proto zvětšení dalekohledu bude větší při použití okuláru s menší ohniskovou vzdáleností, tedy okuláru s ohniskovou vzdáleností f_1. Zvětšení potom bude

$$Z = \frac{f_0}{f_1} = \frac{1\,200\,\mathrm{mm}}{20\,\mathrm{mm}} = 60\,.$$

Teoretickou rozlišovací schopností θ dalekohledu rozumíme nejmenší úhlovou vzdálenost dvou bodových zdrojů, při které se v dalekohledu stále jeví odděleně. Z tzv. Rayleighova kritéria plyne vztah

$$\theta = 1{,}22 \cdot \frac{\lambda}{D}\,, \tag{1}$$

kde λ je vlnová délka záření, na které dalekohledem pozorujeme, a D je průměr apertury (vstupního otvoru) dalekohledu. Dosadíme-li do vztahu (1) za λ a D v metrech, dostaneme číselný výsledek pro úhel θ v radiánech.

b) Jaká je teoretická rozlišovací schopnost θ dalekohledu Jakuba a Lenky při pozorování světel na lodním stožáru? Předpokládej, že tyto zdroje svítí monochromatickým červeným světlem o vlnové délce $\lambda = 640\,\mathrm{nm}$. Výsledek zapiš v radiánech.

Rozlišovací schopnost dalekohledu vypočteme pomocí vztahu (1) v zadání, kde po dosazení hodnot v základních jednotkách vyjde θ v radiánech jako

$$\theta = 1{,}22 \cdot \frac{640 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{m}}{15 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}} \doteq 5{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{rad}\,.$$

Finále 2023/24, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

c) Převeď výsledek předchozí úlohy z radiánů na úhlové vteřiny.

Na úhlové vteřiny (značíme arcsec) můžeme výsledek převést jako

$$\frac{\theta}{\text{arcsec}} = \frac{\theta}{\text{rad}} \cdot \frac{\text{rad}}{\text{arcsec}} \doteq 5{,}2 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{180}{\pi} \cdot 3600 \doteq 1{,}1\,,$$

kde jsme využili faktu, že jeden radián je roven $\frac{180}{\pi} = 57{,}295\ldots$ stupňů. Dostáváme tedy $\theta \doteq 1{,}1\,\text{arcsec}$.

Uvažuj, že fyzická vzdálenost světel na stožáru je $l = 0{,}3\,\text{m}$.

d) V jaké maximální vzdálenosti d_1 od pobřeží (odkud Lenka a Jakub pozorují) může loď proplouvat, aby byly zdroje světla na stožáru dalekohledem rozlišitelné? Vzdálenost uveď v kilometrech. Zakřivení povrchu Země ani vliv atmosféry zatím neuvažuj. Orientaci lodi vůči pobřeží ber optimální.

Maximální vzdálenost d_1, ze které Jakub a Lenka mohou rozlišit dvě světla na stožáru, odpovídá situaci, kdy

1. budou světla orientována tak, že jejich spojnice bude kolmá na zorný paprsek Lenky a Jakuba,
2. bude úhlová vzdálenost mezi světly rovna rozlišovací schopnosti dalekohledu.

Budeme-li dosazovat úhel θ v radiánech a vzdálenost l světel od sebe v metrech, dostáváme

$$d_1 = \frac{l}{\theta} = \frac{0{,}3\,\text{m}}{5{,}2 \cdot 10^{-6}\,\text{rad}} \doteq 57\,692\,\text{m} \doteq 57{,}7\,\text{km}\,.$$

Poznámka 1: Toto je teoretická vzdálenost. Reálná hodnota by byla kvůli atmosferickému seeingu menší.

Poznámka 2: Někteří řešitelé mohou vzdálenost počítat pomocí goniometrické funkce tangens, což je díky malým úhlům ekvivalentní přístup vedoucí ke stejnému číselnému výsledku. V tom případě by vztah mezi d_1, θ a l vypadal následovně

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{l}{2d_1}\,,$$

kde θ opět dosazujeme v radiánech. Odtud bychom dostali

$$d_1 = \frac{l}{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}} \doteq 57\,692\,\text{m} \doteq 57{,}7\,\text{km}\,.$$

Číselný výsledek pro d_1 při uvážení funkce tangens se od výsledku získaného původním postupem liší na dvanácté platné číslici.

Ve skutečnosti je horizont vzdálenosti objektů, které mohou Lenka a Jakub z pláže svého ostrova pozorovat, omezen zakřivením povrchu Země. V následujících úlohách předpokládej, že vrchol lodního stožáru (kde jsou světla umístěná), se nachází ve výšce $h = 40\,\text{m}$ nad hladinou moře. Výšku pozorovacího stanoviště Jakuba a Lenky nad hladinou můžeš zanedbat.

e) Urči maximální možnou vzdálenost d_2 lodě od pobřeží, při které by se vrchol stožáru z pohledu Lenky a Jakuba ještě nacházel nad obzorem. Vliv atmosféry opět neuvažuj, zakřivení Země ale už ano. Předpokládej, že Země je ideální koule o poloměru $R_Z = 6\,371$ km. Výsledek porovnej s hodnotou vzdálenosti d_1, kterou jsi získal(a) v předchozí úloze.

V limitním případě, kdy se vrchol stožáru nachází přesně na horizontu, je zorný paprsek Lenky a Jakuba zároveň tečnou k zemskému povrchu. Trojúhelník SVP (kde S značí střed Země, V vrchol stožáru a P polohu pozorovatele) je tedy pravoúhlý s pravým úhlem při vrcholu P. V tomto trojúhelníku rovněž známe velikosti stran $|\mathsf{SP}| = R_Z$ a $|\mathsf{SV}| = R_Z + h$. Jelikož můžeme očekávat, že vzdálenost d_2 od pozorovatele k lodi vyjde o hodně větší než výška stožáru h, můžeme vzdálenost d_2 ekvivalentně počítat jako vzdálenost od pozorovatele k vrcholku stožáru, tedy jako velikost strany VP. Z Pythagorovy věty pak dostaneme

$$d_2 = \sqrt{(R_Z + h)^2 - (R_Z)^2} = \sqrt{(6\,371\,040)^2 - (6\,371\,000)^2}\,\mathrm{m} \doteq 22\,576\,\mathrm{m} \doteq 22{,}6\,\mathrm{km}\,.$$

Zřejmě platí $d_2 < d_1$. Zdá se tedy, že maximální vzdálenost lodi od pobřeží je více omezena pozorovatelností vrcholku stožáru v důsledku zakřivení Země nežli požadavkem na rozlišení dvou světel dalekohledem.

Měl(a) bys zjistit, že pokud by se loď plavila ve vzdálenosti d_1 od břehu, skrýval by se vrcholek jejího stožáru z pohledu Lenky a Jakuba pod horizontem. Stále zanedbáváme atmosférické jevy.

f) V jaké výšce h' nad hladinou by vrcholek stožáru musel být, aby ho mohli Lenka s Jakubem pozorovat i ze vzdálenosti d_1? Vypočti číselně v metrech.

Naprosto analogickou úvahou jako v předchozí úloze bychom dospěli k Pythagorově větě ve tvaru

$$d_1 = \sqrt{(R_Z + h')^2 - (R_Z)^2}\,.$$

Odtud dostáváme

$$h' = \sqrt{(R_Z)^2 + (d_1)^2} - R_Z = \sqrt{(6\,371\,000)^2 + (57\,692)^2}\,\mathrm{m} - 6\,371\,000\,\mathrm{m} \doteq 261\,\mathrm{m}\,.$$

To je samozřejmě příliš velká hodnota i na velkou zaoceánskou loď.

Finále 2023/24, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

g) Pokud je vrcholek stožáru pouze ve výšce h nad hladinou, vypočti úhlovou „hloubku“ H vrcholku stožáru pod horizontem (z pohledu Jakuba a Lenky), proplouvá-li loď ve vzdálenosti d_1 od pobřeží. Výsledek zapiš v úhlových minutách.

Vzdálenost d_1, ve které loď od Lenky a Jakuba proplouvá, je stále dostatečně malá na to, abychom mohli pro jednoduchost uvažovat, že je stožár kolmý na zorný paprsek. Pro úhlovou výšku H vrcholku stožáru pod horizontem pak můžeme psát

$$H = \frac{h' - h}{d_1} = \frac{261 - 40}{57\,692}\,\mathrm{rad} \doteq 3{,}8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{rad} \doteq 13\,\mathrm{arcmin}\,.$$

Kromě zakřivení zemského povrchu nyní vezměme v potaz rovněž atmosférickou refrakci u horizontu. Jedná se o jev, kdy vlivem ohýbání světelných paprsků šířících se ve směru přibližně tečném k zemskému povrchu dochází k efektivnímu snížení pozorovaného horizontu o jistý úhel ρ. Zmíněný ohyb paprsků nastává v důsledku změn indexu lomu atmosféry v závislosti na výšce nad povrchem. Pro vzdálené objekty na obloze (hvězdy, planety) je hodnota úhlu ρ u obzoru přibližně 35 úhlových minut.

h) Je možné, aby v důsledku výše uvedené hodnoty atmosférické refrakce byl pro Lenku a Jakuba vrcholek stožáru přeci jen viditelný i ze vzdálenosti d_1? Zakroužkuj: ANO / NE.

NE.

Zdůvodnění (nevyžadováno): na první pohled bychom mohli říct, že jelikož platí $35 > 13$, bude se vrcholek stožáru nacházet nad horizontem, který byl v důsledku atmosférické refrakce snížen. Musíme si ale uvědomit, že hodnota 35 úhlových minut udává úhel, o který se ohnou paprsky přicházející od objektu na obloze, tedy paprsky, které prošly celou atmosférou. Tyto paprsky tedy mohly pocítit změnu indexu lomu dostatečnou na to, aby byly ohnuty o 35 úhlových minut. Naproti tomu paprsky, které se šíří od vrcholku stožáru k Jakubovi s Lenkou, setrvávají ve vrstvě atmosféry s přibližně stejnými fyzikálními vlastnostmi (konkrétně s přibližně stejnou hodnotou indexu lomu). Hodnotu atmosférické refrakce u horizontu uvedenou v zadání tedy nelze na problém viditelnosti vrcholku stožáru aplikovat.

Finále 2023/24, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

E Kepler na kometě

(max. 20 bodů)

Stěžejní rovnicí v nebeské mechanice je třetí Keplerův zákon, který v obecném zápisu vypadá takto

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2} \approx \frac{GM}{4\pi^2}\,, \qquad (\heartsuit)$$

kde a je hlavní poloosa dráhy tělesa o hmotnosti m, které s periodou T obíhá těleso o hmotnosti M, a kde G je Newtonova gravitační konstanta. Pokud je M o hodně větší než m (např. pro planety, komety atd. obíhající Slunce), lze m zanedbat, jak je naznačeno za vlnitým rovnítkem. Dalšího zjednodušení můžeme občas dosáhnout, pokud zvolíme příhodnou soustavu jednotek. Uvažujme, že Země má hlavní poloosu 1 au a oběhne Slunce (s hmotností 1 $M_\odot$) za 1 rok. Rovnici ($\heartsuit$) lze tedy také zapsat jako

$$\frac{a^3}{T^2} = 1\,, \qquad (\bigstar)$$

ale pouze za předpokladu, že a bude dosazeno v astronomických jednotkách, T v rocích a centrálním tělesem je Slunce.

a) Jaký je vztah mezi vzdáleností tělesa v aféliu (Q), vzdáleností v perihéliu (q) a hlavní poloosou (a) jeho oběžné dráhy?

$Q + q = 2a$

b) Vyjádři Q a q obecně pomocí hlavní poloosy (a) a číselné výstřednosti (e) eliptické oběžné dráhy.

$Q = a(1+e)$, $q = a(1-e)$

Následující tři části lze řešit v jakémkoliv pořadí, neboť na sebe jejich příklady nenavazují.

E.1 Kometa I

c) Po těsném přiblížení k Jupiteru se dostala hypotetická kometa na novou oběžnou dráhu, která má dvojnásobnou hlavní poloosu. Jak se změnila oběžná perioda komety kolem Slunce?

Vyjdeme ze vztahu ($\bigstar$), který musí platit jak pro původní orbitální parametry (a, T), tak pro nové $(a_\mathrm{n}, T_\mathrm{n})$:

$$a^3 = T^2 \qquad \text{a také} \qquad a_\mathrm{n}^3 = T_\mathrm{n}^2$$

Dosadíme a vyjádříme T_n

$$a_\mathrm{n}^3 = (2a)^3 = T_\mathrm{n}^2 \qquad \Rightarrow \qquad T_\mathrm{n} = \sqrt{8a^3}$$

Abychom mohli porovnat periody, dosadíme za a^3

$$T_\mathrm{n} = \sqrt{8a^3} = \sqrt{8T^2} = \sqrt{8}\,T$$

Perioda se zvětší $\sqrt{8}$krát (případně $2\sqrt{2}$krát nebo 2,83krát).

Finále 2023/24, kategorie EF (8. a 9. třída ZŠ) – řešení

E.2 Kometa II

d) Jules Verne ve svém románu *Na kometě* popisuje kometu, která se k Zemi vrací jednou za 2 roky a která se v aféliu dostává až k Jupiteru. Může taková kometa existovat? Odůvodni výpočtem.

Popisovaná kometa se vrací k Zemi jednou za dva roky (tj. za celočíselný násobek oběžné periody Země). Znamená to tedy, že Zemi potkává ve stejném místě na orbitě a její perioda je tedy $T = 2$ roky.

Vyjdeme ze vztahu (★), protože popisovaná kometa obíhá okolo Slunce, a zkusíme spočítat její hlavní poloosu.

$$a = \sqrt[3]{T^2} = \sqrt[3]{4} \approx 1{,}587\,\mathrm{au}$$

Z tabulek AO víme, že hlavní poloosa Jupiteru je 5,2 au (případně si pamatujeme, že Jupiter má hlavní poloosu 5 au), což je také Q komety.

Buď přímo vidíme, že $2a < Q$, což nemůže platit, nebo dosazením do $2a = Q + q$ dostaneme

$$3{,}174\,\mathrm{au} = 5{,}2\,\mathrm{au} + q\,,$$

tudíž q by muselo být záporné, což nejde.

Kometa tedy nesplňuje 3. Keplerův zákon a nemůže existovat.

E.3 Kometa III

e) Nejmenší vzdálenost slavné Halleyovy komety od Slunce je 0,586 au, největší vzdálenost je 35,1 au. Urči výstřednost a periodu této komety v rocích (obě čísla uveď zaokrouhlená na 3 platné číslice).

Víme, že $q = 0{,}586\,\mathrm{au}$ a $Q = 35{,}1\,\mathrm{au}$, dále z úvodní části vyjádříme

$$a = \frac{q}{1-e} = \frac{Q}{1+e}$$

$$q(1+e) = Q(1-e)\,,$$

odkud úpravami dostaneme

$$e = \frac{Q-q}{Q+q} = \frac{35{,}1\,\mathrm{au} - 0{,}586\,\mathrm{au}}{35{,}1\,\mathrm{au} + 0{,}586\,\mathrm{au}} \approx \underline{0{,}967}$$

K nalezení periody potřebujeme hlavní poloosu

$$a = \frac{q}{1-e} = \frac{0{,}586\,\mathrm{au}}{1-0{,}967} \approx 17{,}8\,\mathrm{au}$$

S využitím 3. Keplerova zákona (★) dostaneme

$$T^2 = a^3 \quad \Rightarrow \quad T = \sqrt{a^3} = \sqrt{17{,}8^3} = \underline{75{,}1\,\text{roků}}$$