Finále 2018/19, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Teoretická část

Krátké úlohy

A Malý pes

(max. 10 bodů)

Vypočtěte absolutní bolometrickou hvězdnou velikost M_{bol} (v mag) a poloměr R Siria B (v násobcích poloměru Země $R_{\oplus}$). Jedná se o bílého trpaslíka typu DA2 s vizuální hvězdnou velikostí $m_{\mathrm{V}} = 8{,}4\,\mathrm{mag}$ a efektivní teplotou $T = 26\,000\,\mathrm{K}$. Paralaxa Siria je $\pi = 380\,\mathrm{mas}$. Bolometrická korekce pro bílé trpaslíky daného typu je $BC = -3{,}0\,\mathrm{mag}$.

Z Pogsonovy rovnice máme

$$M_{\mathrm{bol}} = m_{\mathrm{V}} + 5 + 5\log\frac{\pi}{\mathrm{arcsec}} + BC\,.$$

Číselně $M_{\mathrm{bol}} \doteq 8{,}3\,\mathrm{mag}$. Z další Pogsonovy rovnice dostáváme

$$M_{\mathrm{bol}} - M_{\mathrm{bol},\odot} = -2{,}5\log\frac{L}{L_{\odot}} \quad\Longrightarrow\quad \frac{L}{L_{\odot}} = 10^{-0{,}4(M_{\mathrm{bol}}-M_{\mathrm{bol},\odot})}\,,$$

kde $M_{\mathrm{bol},\odot}$ je absolutní bolometrická hvězdná velikost Slunce a L, resp. $L_{\odot}$ je zářivý výkon Siria B, resp. Slunce. Ze Stefanova–Boltzmannova zákona $L = 4\pi R^2\sigma T^4$ pak máme

$$R = \sqrt{\frac{L_{\odot}}{4\pi\sigma T^4}10^{-0{,}2(M_{\mathrm{bol}}-M_{\mathrm{bol},\odot})}}\,.$$

Číselně $R \doteq 1{,}1 R_{\oplus}$.

B Návštěvník

(max. 10 bodů)

Vypočtěte velikost v_∞ rychlosti (v $\mathrm{km\cdot s^{-1}}$) interstelárního objektu 1I/'Oumuamua poté, co opustí sluneční soustavu, víte-li, že perihelem ve vzdálenosti $r_{\mathrm{p}} = 0{,}255\,\mathrm{au}$ prolétl rychlostí $v_{\mathrm{p}} = 87{,}7\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}$. Jaká je malá poloosa b jeho dráhy (kolmá vzdálenost od Slunce k asymptotě) v au?

Celkovou mechanickou energii E_{p} objektu (na jednotku jeho hmotnosti) v okamžiku průletu perihelem vyjádříme jako

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}v_{\mathrm{p}}^2 - \frac{GM_{\odot}}{r_{\mathrm{p}}}\,.$$

Po opuštění sluneční soustavy je potenciální energie objektu nulová. Odpovídající celková mechanická energie tedy splňuje $E_\infty = \frac{1}{2}v_\infty^2$. Ze zákona zachování energie máme $E_{\mathrm{p}} = E_\infty$, tedy

$$\frac{1}{2}v_{\mathrm{p}}^2 - \frac{GM_{\odot}}{r_{\mathrm{p}}} = \frac{1}{2}v_\infty^2 \quad\Longrightarrow\quad v_\infty = \sqrt{v_{\mathrm{p}}^2 - \frac{2GM_{\odot}}{r_{\mathrm{p}}}} \doteq 27\,\mathrm{km\cdot s^{-1}}\,.$$

Ze zákona zachování momentu hybnosti máme $bv_\infty = r_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{p}}$, tedy $b = r_{\mathrm{p}}v_{\mathrm{p}}/v_\infty$. Číselně $b \doteq 0{,}83\,\mathrm{au}$.

C Zářivé Slunce

(max. 10 bodů)

Jakého maximálního zářivého výkonu L může Slunce během svého života dosáhnout, aniž by začalo překotně odhazovat své vnější vrstvy (stačí řádový odhad v násobcích $L_\odot$)? Interakci záření s látkou ve fotosféře modelujte jako pružné srážky fotonů s objekty o hmotnosti $m_\mathrm{p} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ s účinným průřezem $\sigma_\mathrm{T} = 6{,}65 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{m}^2$. Postupný pokles hmotnosti Slunce pro jednoduchost zanedbejte.

Slunce si udrží své vnější vrstvy za předpokladu, že tlaková síla, kterou záření působí na látku ve fotosféře, není větší než gravitační síla. Jelikož interakci modelujeme jako pružné srážky,[1] dostáváme pro sílu F_rad, kterou působí záření na jeden objekt s účinným průřezem σ_T ve vzdálenosti $R_\odot$ od středu Slunce, vztah (za použití disperzní relace $E = pc$ pro foton)

$$F_\mathrm{rad} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{c}\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{c}\frac{L\,\sigma_\mathrm{T}}{4\pi R_\odot^2}\,.$$

Porovnáním s gravitační silou $GM_\odot m_\mathrm{p}/R_\odot^2$ dostáváme pro limitní hodnotu zářivého výkonu

$$L = \frac{4\pi G M_\odot m_\mathrm{p} c}{\sigma_\mathrm{T}} \approx 10^4 L_\odot\,.$$

Jedná se o tzv. Eddingtonovu mez. Slunce se této mezi přiblíží ve fázi tzv. asymptotické větve obrů, kdy jeho zářivý výkon dosáhne řádově $10^3 L_\odot$ (zde musíme počítat s výrazným úbytkem hmotnosti Slunce, a tedy i s nižší Eddingtonovou mezí).

D Pions in the air

(max. 10 bodů)

Neutrální pion π^0 je nestabilní částice o klidové hmotnosti $m_0 = 135{,}0\,\mathrm{MeV/c^2}$ a střední době života $\tau' = 8{,}4 \cdot 10^{-17}\,\mathrm{s}$. Rozpadá se na dva fotony dle rovnice $\pi^0 \to \gamma + \gamma$. Uvažujme konkrétní pion, který vznikl při interakci částic kosmického záření v atmosféře. V soustavě pozorovatele na povrchu Země má tento pion energii $E = 1{,}00\,\mathrm{GeV}$. Zanedbejte interakci pionu s částicemi v atmosféře.

a) V soustavě pozorovatele určete velikost v rychlosti (v násobcích c) pionu a jeho střední dráhu l.

Vyjdeme z relativistického vztahu energii

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\,.$$

Pro velikost rychlosti tedy máme

$$v = c\sqrt{1 - \frac{m_0^2 c^4}{E^2}} \doteq 0,991c\,.$$

[1] Fotony záření interagují především s elektrony, a to skrze Thomsonův účinný průřez σ_T. Avšak jakákoli lokální odchylka od neutrality je okamžitě kompenzována coulombovskou silou mezi elektrony a protony, takže celkovou interakci lze efektivně modelovat jako srážky s účinným průřezem σ_T fotonů s elektron-protonovými páry o hmotnosti m_p ($m_\mathrm{p} \gg m_\mathrm{e}$, kde m_p, resp. m_e je hmotnost protonu, resp. elektronu).

Pro střední délku života v soustavě pozorovatele platí

$$\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \tau' \frac{E}{m_0 c^2}\,.$$

Pro střední dráhu pionu tedy dostáváme $l = v\tau = v\tau'(E/m_0c^2) \doteq 1{,}85 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}$.

b) Vypočtěte maximální rozdíl ΔE energií fotonů v soustavě pozorovatele (v GeV).

Největší rozdíl energií nastane, pokud se jeden z fotonů bude pohybovat v původním směru letu pionu (značíme indexem 1) a druhý poletí proti (značíme indexem 2). Ze zákona zachování energie dostáváme pro energii jednotlivých fotonů v klidové soustavě pionu $E' = m_0c^2/2$. Ze vztahu pro relativistický Dopplerův posuv pak pro rozdíl energií těchto fotonů v soustavě pozorovatele dostaneme

$$\Delta E = E_1 - E_2 = \frac{1}{2} m_0 c^2 \left(\sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - \sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \right) = \frac{v}{c} E = \sqrt{E^2 - m_0^2 c^4}\,.$$

Číselně máme $\Delta E \doteq 0{,}991\,\mathrm{GeV}$.

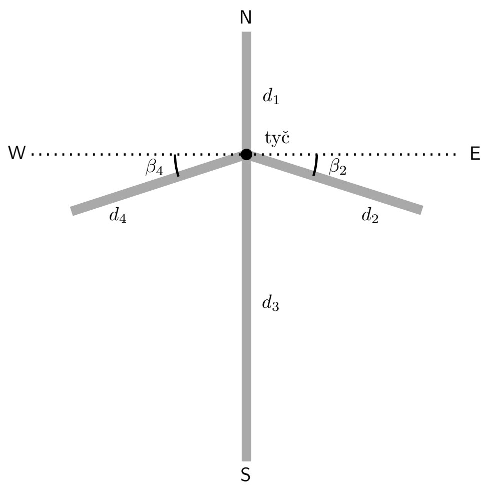
Astronomická olympiáda
SLEZSKÁ UNIVERZITA FILOZOFICKO-PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA V OPAVĚ
Česká astronomická společnost
http://www.astro.cz
http://olympiada.astro.cz

Finále 2018/19, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení
Teoretická část
Dlouhé úlohy

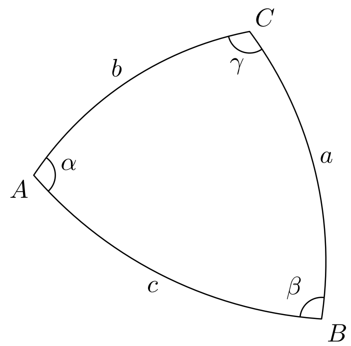
E Fotografie stínů

(max. 20 bodů)

Fotograf na neznámém místě na Zemi umístil svůj fotoaparát přímo nad vertikální tyč o výšce $H = 1\,\mathrm{m}$ tak, aby snímal tyč a její okolí. Jakmile se Slunce nacházelo na jižním oblouku meridiánu, pořídil první snímek tyče a jejího stínu. Poté pořídil další tři fotografie vždy v intervalu 6 h. Složením těchto 4 snímků vznikl obrazec, jehož schematické znázornění vidíme na obr. 1.



Obrázek 1: Složené čtyři fotografie stínů vertikální tyče (pohled shora, schematicky).



Obrázek 2: Sférický trojúhelník.

Fotograf změřil délku nejkratšího a nejdelšího stínu jako $d_1 = 2\,\mathrm{m}$, $d_3 = 5\,\mathrm{m}$. V následujících výpočtech předpokládejte, že Země obíhá kolem Slunce po kruhové dráze s periodou $T_{\mathrm{rok}} = 365{,}24\,\mathrm{d}$, že jarní rovnodennost nastala 21. 3., že deklinace Slunce se během dne nemění a že sklon světového rovníku vůči ekliptice je $\varepsilon = 23{,}44°$. Atmosférickou refrakci a zakřivení povrchu Země neuvažujte.

a) Vypočtěte výšku h_1, resp. h_3 Slunce nad obzorem, když byl stín nejkratší, resp. nejdelší.

Sluneční paprsky dopadají na zemský povrch tak, že úhel mezi povrchem Země a směrem paprsku je stejný jako výška Slunce nad obzorem. Nejkratší stín tedy znamená horní kulminaci Slunce, nejdelší stín znamená dolní kulminaci. Z pravoúhlých trojúheníků tedy máme

$$h_1 = \operatorname{arctg} \frac{H}{d_1} \doteq 26°\,34'\,,$$
$$h_3 = \operatorname{arctg} \frac{H}{d_3} \doteq 11°\,19'\,.$$

b) Vypočtěte deklinaci Slunce $\delta_\odot$ a zeměpisnou šířku ϕ místa, kde se fotograf nachází.

Finále 2018/19, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

Protože horní a dolní kulminace Slunce proběhla každá nad opačnou světovou stranou, můžeme psát

$$180° - h_1 - h_3 = 2(90° - \delta_\odot)\,,$$

a tedy

$$\delta_\odot = \frac{h_1 + h_3}{2} \doteq 18°\,56'\,.$$

Pro zeměpisnou šířku ϕ potom píšeme

$$\phi = 90° - \delta_\odot + h_3 = 90° - \frac{h_1 - h_3}{2} = 82°\,22'\,.$$

c) Vypočtěte délky d_2 a d_4 zbývajících dvou stínů obrazce (v m).

Ze sférického trojúhelníku severní světový pól – zenit – Slunce (tzv. nautický trojúhelník) pro hodinový úhel Slunce $t = t_2 = 6\,\mathrm{h}$ nebo $t = t_4 = 18\,\mathrm{h}$ dostáváme

$$\sin h_2 = \sin h_4 = \sin\phi \sin\delta_\odot\,,$$

číselně $h_2 = h_4 \doteq 18°46'$. Máme tedy

$$d_{2,4} = \frac{H}{\operatorname{tg} h_{2,4}} \doteq 2{,}94\,\mathrm{m}\,.$$

d) Určete velikosti úhlů β_2 a β_4.

Z nautického trojúhelníku pro $t = t_2 = 6\,\mathrm{h}$ máme (azimut měříme od jihu v matematicky záporném směru)

$$\cos h_2 \sin A_2 = \cos\delta_\odot\,.$$

Číselně $A_2 \doteq 92°36'$. Máme tedy $\beta_2 = \beta_4 \doteq 2°36'$.

e) Určete den v roce, kdy byla fotografie pořízena.

Ze sférického trojúhelníku Slunce – jarní bod – severní světový pól máme

$$\sin\delta_\odot(\tau) = \sin\varepsilon\,\sin\omega_\odot\tau\,,$$

kde $\omega_\odot = 2\pi/T_{\mathrm{rok}}$ a čas τ měříme od jarní rovnodennosti. Číselně vychází dvě řešení: $\tau_1 \doteq 55{,}5\,\mathrm{d}$, $\tau_2 \doteq 127{,}2\,\mathrm{d}$. To odpovídá 15. květnu a 26. červenci.

f) Prezentujte stručný argument, kterým dokážete, že pro obecnou deklinaci Slunce $\delta_\odot$ a zeměpisnou šířku ϕ opisuje na zemi špička stínu kuželosečku.

Jelikož se Slunce na obloze během dne pohybuje po (obecně vedlejší) kružnici, opisuje paprsek spojující Slunce a špičku tyče plášť kužele. Křivku, kterou špička stínu vykreslí na zemi, dostaneme tak, že tento kužel protneme rovinou horizontu v místě paty tyče. Jedná se tedy skutečně o kuželosečku.

g) Napište podmínky pro $\delta_\odot$ a ϕ, aby špička stínu vykreslovala elipsu, parabolu nebo hyperbolu.

Nejdříve musíme zajistit, aby Slunce vůbec vyšlo. Toho docílíme podmínkou $|\delta_\odot - \phi| < 90°$. Z podmínky, aby Slunce nezapadalo, dostáváme $|\delta_\odot + \phi| > 90°$ pro elipsu. Pro parabolu máme $|\delta_\odot + \phi| = 90°$, pro hyperbolu pak $|\delta_\odot + \phi| < 90°$.

h) Napište podmínku pro $\delta_\odot$, aby se špička stínu pro libovolné ϕ pohybovala po přímce. Vyjádřete vzdálenost b této přímky od tyče pomocí H a ϕ.

Situace, kdy stín vykresluje na zemi přímku, nastává v (degenerovaném) případě, kdy vrcholový úhel kužele paprsků spojujících Slunce a špičku tyče je 180°. Potřebujeme tedy, aby se Slunce na obloze pohybovalo po hlavní kružnici, tedy $\delta_\odot = 0°$. Špička stínu se tedy pohybuje po přímce při rovnodennosti. Z průchodu Slunce meridiánem dostáváme $b = H|\mathrm{tg}\,\phi|$.

Nápověda: ve sférickém trojúhelníku (obr. 2) platí sinová věta $\sin a/\sin\alpha = \sin b/\sin\beta = \sin c/\sin\gamma$ a kosinová věta $\cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos\gamma$.

F Škálový faktor

(max. 20 bodů)

V této úloze budeme zkoumat různé aspekty vývoje vesmíru od raných fází až po současnost (kterou označme jako čas t_0). Rozpínání vesmíru popisujeme tzv. *škálovým faktorem* $a(t)$: jedná se o podíl kosmologických vzdáleností v čase t vůči jejich současným hodnotám (tedy $a_0 \equiv a(t_0) = 1$).

Předpokládejte, že podíly $\Omega_\mathrm{m} \equiv \rho_\mathrm{m}/\rho_\mathrm{c}$, $\Omega_\mathrm{r} \equiv \rho_\mathrm{r}/\rho_\mathrm{c}$, resp. $\Omega_\Lambda \equiv \rho_\Lambda/\rho_\mathrm{c}$ hustoty hmoty ρ_m, záření ρ_r, resp. temné energie ρ_Λ na kritické hustotě ρ_c jsou v současnosti dány hodnotami $\Omega_\mathrm{m,0} = 0{,}308\,9$, $\Omega_\mathrm{r,0} = 9{,}236\cdot 10^{-5}$, resp. $\Omega_{\Lambda,0} = 0{,}691\,1$, že současná hodnota Hubbleova(-Lemaîtrova) parametru je $H_0 = 67{,}7\,\mathrm{km\cdot s^{-1}\cdot Mpc^{-1}}$ a že současná teplota reliktního záření je $T_0 = 2{,}73\,\mathrm{K}$.

Dále předpokládejte, že v obecné fázi vývoje vesmíru (dané škálovým faktorem a) platí následující:

- hustoty hmoty, záření, resp. temné energie jsou dány vztahy $\rho_\mathrm{m}(a) = \rho_\mathrm{m,0}a^{-3}$, $\rho_\mathrm{r}(a) = \rho_\mathrm{r,0}a^{-4}$, resp. $\rho_\Lambda(a) = \rho_{\Lambda,0}$, kde $\rho_\mathrm{m,0}$, $\rho_\mathrm{r,0}$, $\rho_{\Lambda,0}$ jsou hustoty jednotlivých komponent v současnosti t_0,
- tzv. kritická hustota $\rho_\mathrm{c}(a)$ a Hubbleův parametr $H(a)$ jsou svázány vztahem $\rho_\mathrm{c}(a) = \frac{3H(a)^2}{8\pi G}$,
- celková hustota látky ve vesmíru je rovna kritické hustotě (náš vesmír je plochý), takže

$$H(a) = H_0\sqrt{\Omega_\mathrm{m,0}a^{-3} + \Omega_\mathrm{r,0}a^{-4} + \Omega_{\Lambda,0}}\,.$$

a) Vypočtěte hodnoty $a_\downarrow$, resp. $a_\uparrow$ škálového faktoru při rekombinaci, resp. na začátku období reionizace. Teplota reliktního záření v době rekombinace byla $T_\downarrow = 3\,000\,\mathrm{K}$, zatímco červený posuv odpovídající začátku reionizace je $z_\uparrow = 20$.

Máme

$$a_\downarrow = \frac{T_0}{T_\downarrow} \doteq 0{,}000\,9\,,$$

$$a_\uparrow = \frac{1}{1+z_\uparrow} \doteq 0{,}047\,6\,.$$

Finále 2018/19, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

b) Určete hodnoty $a_{\text{m-r}}$, resp. $a_{\Lambda\text{-m}}$ škálového faktoru v okamžiku rovnosti hustot záření a hmoty, resp. hmoty a temné energie.

Z podmínek $\rho_{\text{m},0}a_{\text{m-r}}^{-3} = \rho_{\text{r},0}a_{\text{m-r}}^{-4}$, resp. $\rho_{\text{m},0}a_{\Lambda\text{-m}}^{-3} = \rho_{\Lambda,0}$ dostáváme

$$a_{\text{m-r}} = \frac{\Omega_{\text{r},0}}{\Omega_{\text{m},0}} \doteq 0{,}000\,3\,,$$
$$a_{\Lambda\text{-m}} = \left(\frac{\Omega_{\text{m},0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{\frac{1}{3}} \doteq 0{,}764\,6\,.$$

c) Určete hodnoty a_{r}, resp. a_{Λ} škálového faktoru takové, aby platilo $\Omega_{\text{r}}(a) < 0{,}01$ pro $a > a_{\text{r}}$, resp. $\Omega_{\Lambda}(a) < 0{,}01$ pro $a < a_{\Lambda}$. Porovnejte s hodnotami $a_{\downarrow}$, $a_{\uparrow}$ a $a_{\text{m-r}}$, $a_{\Lambda\text{-m}}$.

Dosazením do definičních vztahů dostáváme podmínky

$$0{,}01 = \frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{\text{m},0}a_{\Lambda}^{-3} + \Omega_{\text{r},0}a_{\Lambda}^{-4} + \Omega_{\Lambda,0}}\,,$$
$$0{,}01 = \frac{\Omega_{\text{r},0}a_{\text{r}}^{-4}}{\Omega_{\text{m},0}a_{\text{r}}^{-3} + \Omega_{\text{r},0}a_{\text{r}}^{-4} + \Omega_{\Lambda,0}}\,.$$

Řešení x, resp. y těchto rovnic (v nichž známe všechny koeficienty numericky) pro a_{Λ}, resp. a_{r} můžeme buď uhádnout a ověřit na kalkulačce, nebo ho určit pomocí iterativních schemat

$$x_{n+1}^{-3} = (99\Omega_{\Lambda,0} - \Omega_{\text{r},0}x_n^{-4})/\Omega_{\text{m},0}\,,$$
$$y_{n+1} = (99\Omega_{\text{r},0} - \Omega_{\Lambda,0}y_n^{4})/\Omega_{\text{m},0}\,,$$

s výchozími hodnotami $x_0 = 1$, resp. $y_0 = 0$. Dostáváme pak $a_{\Lambda} \doteq 0{,}165$, $a_{\text{r}} \doteq 0{,}030$. Protože máme $a_{\downarrow} < a_{\text{r}}$, $a_{\downarrow} < a_{\Lambda}$ a $a_{\downarrow} \sim a_{\text{m-r}}$, vidíme, že v období rekombinace byly pro vývoj škálového faktoru důležité pouze záření a hmota. Na začátku reionizace máme $a_{\uparrow} > a_{\text{r}}$, $a_{\uparrow} < a_{\Lambda}$, takže vývoj škálového faktoru byl určován pouze hmotou.

Pro $a > a_{\text{r}}$ můžeme pro jednoduchost předpokládat, že vesmír obsahuje pouze hmotu a temnou energii. Lze odvodit, že škálový faktor je za těchto podmínek velmi dobře popsán vztahem

$$a(t) = \left[\sqrt{\frac{\Omega_{\text{m},0}}{\Omega_{\Lambda,0}}}\sinh\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}H_0 t\right)\right]^{\frac{2}{3}}\,. \qquad (\heartsuit)$$

d) Využijte vztah ($\heartsuit$) k odhadu současného stáří vesmíru t_0. Výsledek udejte v miliardách let.

Z podmínky $a(t_0) = 1$ dostáváme

$$t_0 = \frac{2}{3}H_0^{-1}\Omega_{\Lambda,0}^{-1/2}\text{argsinh}\sqrt{\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{\text{m},0}}} \doteq 13{,}8\,\text{Gyr}\,.$$

Neuvažujeme přitom odlišné chování škálového faktoru pro $a < a_{\text{r}}$. Jedná se o velmi dobré přiblížení, neboť $a_{\text{r}} \ll 1$.

Finále 2018/19, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ) – řešení

e) Ukažte, že pro $a \gg a_{\Lambda\text{-m}}$ platí $a(t) \approx C_1 e^{H_\infty t}$, zatímco pro $a \ll a_{\Lambda\text{-m}}$ platí $a(t) \approx C_2 t^p$. Vyjádřete C_1, C_2, p a H_∞ pomocí $\Omega_{\mathrm{m},0}$, $\Omega_{\Lambda,0}$ a H_0.

Je zřejmé ze vztahu (♡) (funkce $\sinh x$ je monotónní), že režim $a \gg a_{\Lambda\text{-m}}$ odpovídá režimu $\Omega_{\Lambda,0}^{1/2} H_0 t \gg 1$, pro který máme

$$\sinh\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}H_0 t\right) \approx \frac{1}{2}\exp\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}H_0 t\right).$$

Odtud máme $C_1 = \left(\frac{\Omega_{\mathrm{m},0}}{4\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{\frac{1}{3}}$ a $H_\infty = \sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}H_0$. Pro $a \ll a_{\Lambda\text{-m}}$ máme $\Omega_{\Lambda,0}^{1/2} H_0 t \ll 1$, a tedy

$$\sinh\left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}H_0 t\right) \approx \frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\Lambda,0}}H_0 t\,.$$

Odtud máme $C_2 = \left(\frac{3}{2}\sqrt{\Omega_{\mathrm{m},0}}H_0\right)^{\frac{2}{3}}$ a $p = \frac{2}{3}$.

Nápověda: Definujeme $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$. Může se vám hodit, že pro $x \ll 1$ platí

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2\,.$$

f) Popište fyzikální interpretaci veličiny H_∞ a spočtěte její číselnou hodnotu (v $\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{Mpc}^{-1}$).

Veličina H_∞ udává hodnotu Hubbleova parametru pro $\Omega_{\Lambda,0}^{1/2} H_0 t \gg 1$. Číselně dostaneme $H_\infty \doteq 56{,}3\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{Mpc}^{-1}$.