Krajské kolo 2018/19, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

A Přehledový test

(max. 30 bodů)

Úvodní test se řeší online na http://olympiada.astro.cz/korespondencni. Přihlašovací údaje přišly úspěšným řešitelům školního kola e-mailem, nebo je dostanete od svého učitele, který je může zjistit v sekci pro učitele na http://olympiada.astro.cz/ucitel. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou.

B Tmavý horký jupiter

(max. 20 bodů)

Za téměř 10 let svého fungování stihla sonda Kepler objevit přes 2 600 nových exoplanet s rozličnými parametry: od tzv. horkých jupiterů (plynní obři obíhající ve velmi malé vzdálenosti od své mateřské hvězdy) až po kamenné planety podobné Zemi. V této úloze se podíváme do samých začátků života této jedinečné sondy, kdy své schopnosti testovala na tou dobou již známém systému HAT-P-7 b. Vaším úkolem bude zjistit o tomto vzdáleném světě některé údaje. K dispozici vám je světelná křivka (obrázky 1 a 2) pořízená právě sondou Kepler.

Můžete předpokládat, že oběžná dráha exoplanety HAT-P-7 b je kruhová (což se ukazuje být konzistentní s naměřenými daty).

a) Vyznačte na světelné křivce primární a sekundární minimum. Nakreslete schéma systému (polohu hvězdy, exoplanety a směr k pozorovateli) v obou situacích.

> Na světelné křivce se periodicky opakují dva druhy minim: primární (hlubší) a sekundární (mělčí). Primární minimum odpovídá přechodu (tranzitu) exoplanety přes disk hvězdy (exoplaneta zakrývá část disku hvězdy, což vede k dočasnému poklesu jasnosti systému), sekundární minimum odpovídá zákrytu exoplanety hvězdou (exoplaneta svítí odraženým světlem od mateřské hvězdy).

b) Vysvětlete zaoblený tvar dna primárního minima. Rovněž vysvětlete rostoucí hodnotu intenzity mezi koncem primárního zákrytu a začátkem sekundárního zákrytu.

> Plošná jasnost disku hvězd není homogenní: zmenšuje se od středu směrem k okraji (tzv. *okrajové ztemnění*). Jak se exoplaneta přesouvá od okraje disku směrem ke středu, blokuje tedy čím dál více světla disku mateřské hvězdy. To vede k prohnutému tvaru dna primárního minima.
>
> Exoplaneta svítí pouze odraženým světlem od mateřské hvězdy. Její fáze se zvětšuje od konce primárního zákrytu (fáze přibližně 0 %, fázový úhel přibližně 180°) až po začátek sekundárního zákrytu (fáze přibližně 100 %, fázový úhel přibližně 0°). To vede k rostoucí hodnotě pozorované intenzity světla, které k nám od systému přichází.

c) Určete periodu P oběhu exoplanety ve dnech.

> Ze světelné křivky snadno odečteme $P \doteq 2{,}2\,\mathrm{d}$.

d) Určete poměr $x = R_\mathrm{p}/R_*$ poloměru exoplanety vůči poloměru hvězdy.

Krajské kolo 2018/19, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Zaoblené dno nahraďme plochým dnem s průměrnou relativní intenzitou i_1, jejíž hodnotu odhadneme ze světelné křivky jako $i_1 \doteq 0{,}994$. Jelikož registrovaná intenzita je úměrná ploše nezakrytého disku mateřské hvězdy, platí

$$i_1 = \frac{R_*^2 - R_\mathrm{p}^2}{R_*^2} = 1 - x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \sqrt{1 - i_1}\,.$$

Číselně máme $x \doteq 0{,}077$.

Z asteroseismologických modelů byla určena hmotnost, resp. poloměr mateřské hvězdy HAT-P-7 jako $M_* = (1{,}51 \pm 0{,}05)M_\odot$, resp. $R_* = (2{,}00 \pm 0{,}02)R_\odot$. Kombinace fotometrických a spektrometrických měření rovněž poskytla hmotnost exoplanety $M_\mathrm{p} = (1{,}74 \pm 0{,}03)M_\mathrm{J}$.

e) Vypočtěte poloměr a oběžné dráhy exoplanety v au, poloměr R_p exoplanety v jednotkách poloměru R_J Jupitera a rovněž střední hustotu ρ_p exoplanety v jednotkách střední hustoty Jupitera ρ_J.

Z 3. Keplerova zákona dostáváme

$$a = \left(\frac{GM_*P^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}\,,$$

a tedy $a \doteq 0{,}038\,\mathrm{au}$. S využitím výsledku úlohy d) máme $R_\mathrm{p} \doteq 1{,}5R_\mathrm{J}$. Konečně máme $\rho_\mathrm{p} = M_\mathrm{p}/(4\pi R_\mathrm{p}^3/3) \doteq 0{,}5\rho_\mathrm{J}$. Jedná se tedy o plynného obra. S ohledem na velikost poloměru oběžné dráhy lze usoudit, že se jedná o tzv. horkého jupitera.

f) Vypočtěte geometrické albedo A_g exoplanety HAT-P-7 b. Porovnejte získanou hodnotu s údaji pro plynné obry sluneční soustavy.

Nápověda: Geometrické albedo A_g je míra odrazivosti povrchu planety. Definujeme ho tak, aby platilo

$$I = I_0 A_\mathrm{g} \frac{R_\mathrm{p}^2}{r^2}\,,$$

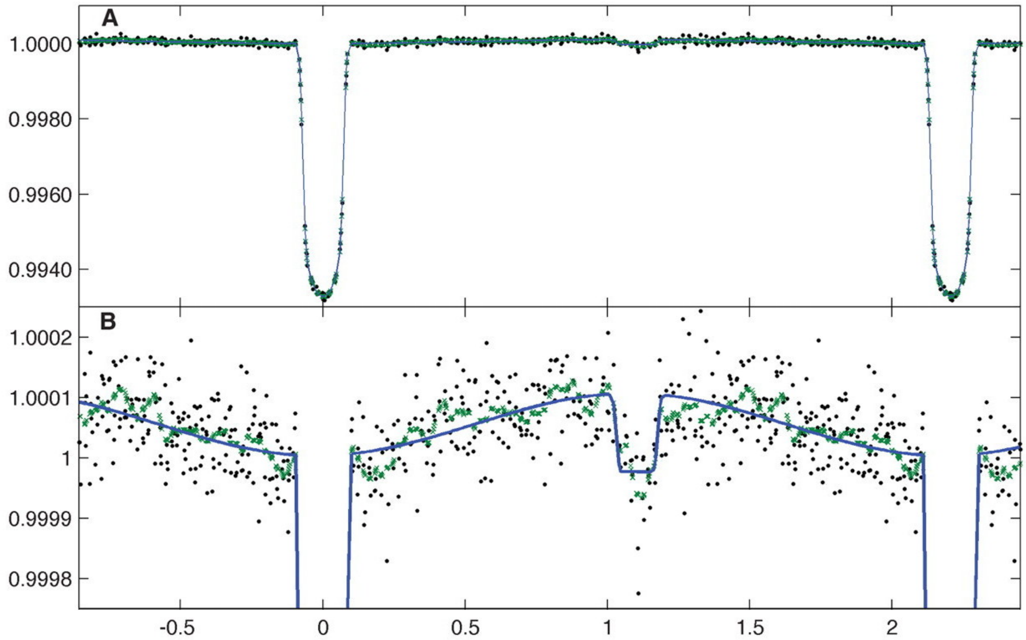
kde R_p je poloměr planety, r je vzdálenost od planety k pozorovateli, I_0 je intenzita světla, které dopadá na planetu a I je intenzita odraženého světla, kterou pozorovatel naměří při nulovém fázovém úhlu (tj. v případě, že je planeta „v úplňku“).

Těsně před začátkem sekundárního zákrytu se exoplaneta blíží do plné fáze. Fázový úhel tedy můžeme přibližně položit rovný nule. Označíme-li relativní intenzitu na počátku sekundárního zákrytu (neboli hloubku sekundárního zákrytu) jako i_2, potom dle nápovědy platí

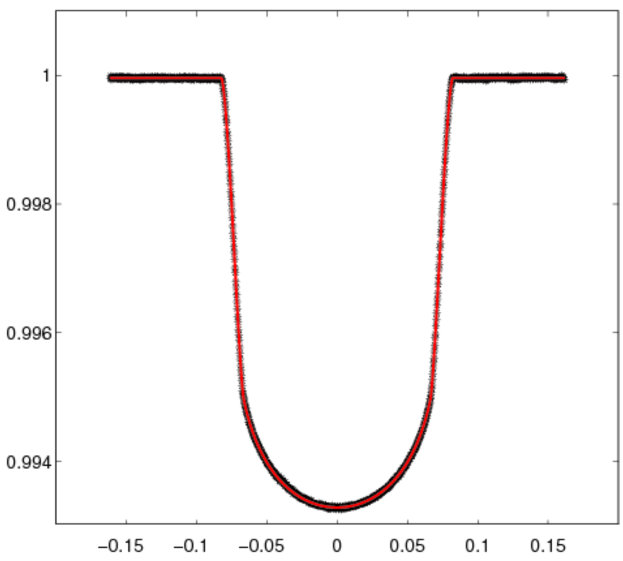
$$i_2 = \frac{I_* + I_\mathrm{p}}{I_*} = \frac{\frac{L_*}{4\pi r^2} + \frac{L_*}{4\pi a^2} A_\mathrm{g} \frac{R_\mathrm{p}^2}{r^2}}{\frac{L_*}{4\pi r^2}} = 1 + A_\mathrm{g}\frac{R_\mathrm{p}^2}{a^2}\,,$$

kde jsme označili I_*, resp. I_p intenzitu, kterou pozorovatel registruje od mateřské hvězdy, resp. od exoplanety. Z detailu sekundárního minima můžeme odečíst $i_2 \doteq 1{,}000\,08$. Máme tedy $A_\mathrm{g} = (i_2 - 1)(a/R_\mathrm{p})^2 \doteq 0{,}2$. To je méně, než pro všechny čtyři plynné obry sluneční soustavy.

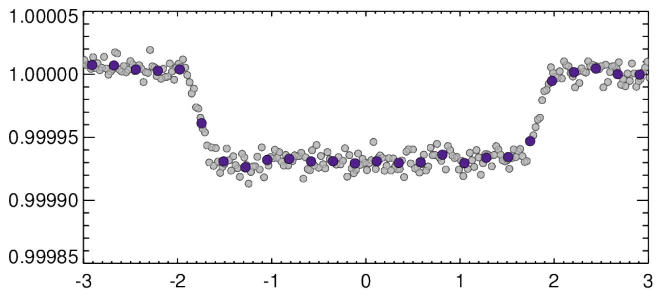
Krajské kolo 2018/19, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení



Obrázek 1: Světelná křivka exoplanety HAT-P-7 b. Na vodorovné ose je vynesen čas od středu primárního minima (ve dnech). Na svislé ose je vynesena (kalibrovaná) intenzita světla v relativní míře (vztažená vůči intenzitě světla od mateřské hvězdy). Grafy A a B zobrazují samotnou závislost změřené intenzity světla na čase. Data jsou proložena křivkou, která co nejlépe modeluje změřenou závislost (lokálně v jednotlivých úsecích). Data: *Borucki et al.* (2009).



(a) Detail primárního minima zkonstruovaný složením dat z více tranzitů. Na vodorovné ose je vynesen čas (ve dnech) od středu primárního minima.



(b) Detail sekundárního minima zkonstruovaný složením dat z více zákrytů. Na vodorovné ose je čas (v hodinách) od středu sekundárního minima.

Obrázek 2: Detail primárního a sekundárního minima. Na svislé ose je vynesena (kalibrovaná) intenzita světla v relativní míře (vztažená vůči intenzitě světla od mateřské hvězdy).

Krajské kolo 2018/19, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

C Smolný den

(max. 20 bodů)

První přesné měření obvodu Země je přisuzováno Eratosthénovi z Kyrény, matematikovi, geografovi, básníkovi a v neposlední řadě astronomovi. Eratosthénes se jednoho dne doslechl, že v Syeně (dnešním Asuánu) je velmi hluboká studna, na jejíž dno dopadají paprsky pouze během letního slunovratu. Paprsky údajně dopadaly v pravé poledne do studny přesně tak, že osvítili pouze její dno, nikoliv však její stěny. Eratosthénes pak zapíchl doma v Alexandrii do země svisle tyč (gnómón) a v den letního slunovratu určil v poledne délku jejího stínu. Z těchto údajů pak mohl určit rozdíl zeměpisných šířek Alexandrie a Syeny. Ze změřené vzdálenosti těchto míst a faktu, že obě města leží na stejném poledníku, byl schopen určit obvod Země. Následující úloha si z tohoto historického počinu jistě vzala kus inspirace.

Roztržitý astronom žijící na pustém ostrově se procházel v okolí svého pracoviště. Při jedné ze svých procházek pozoroval Slunce přesně v okamžiku, kdy střed slunečního disku splynul s jarním bodem. Naneštěstí pro něj k tomuto jevu došlo ve chvíli, kdy se sluneční kotouč nacházel přímo v zenitu, a tak se náš hrdina nedíval, kam šlape, a spadl do studny. Jelikož žil na ostrově sám, nebyl nikdo, kdo by ho vytáhl, a tak se musel smířit s tím, že se studna stala na dlouhou dobu jeho novým pozorovacím stanovištěm.

Studna měla kruhový průřez, její hloubka byla $H = 15\,\mathrm{m}$ a poloměr $r = 1\,\mathrm{m}$. Astronom má oči ve výšce $h = 1{,}75\,\mathrm{m}$ a vždy pozoruje přímo z osy studny. Vliv refrakce v následujících úlohách neuvažujte. Uvažujte, že ve studni nebyla voda.

a) Kolik procent oblohy mohl astronom ze studny pozorovat v jeden okamžik?

V jeden okamžik vidí astronom kruhový výřez oblohy o průměru α. Průměr tohoto výřezu v úhlových stupních lze jednoduše vypočítat z hloubky studny, jejího poloměru a výšky astronomových očí. Dostáváme

$$\alpha = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{r}{H-h}\right)\,.$$

Uvážíme-li projekci oblohy na sféru o obecném poloměru R (jejíž plocha je $S_0 = 4\pi R^2$), stačí nám pak určit plochu kulového vrchlíku, jehož průměr vidí astronom pod úhlem α. Pro plochu S_v kulového vrchlíku platí

$$S_\mathrm{v} = 2\pi R v \;= 2\pi R^2\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\,,$$

kde $v = R\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)$ je výška vrchlíku. Proto procento oblohy, které astronom v jeden okamžik může ze studně vidět, je

$$p_1 = \frac{S_\mathrm{v}}{S_0} = \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{\alpha}{2}\right)\,.$$

Po číselném dosazení zadaných hodnot dostaneme zlomek oblohy viditelné v jeden okamžik $p_1 \doteq 1{,}4\cdot 10^{-3} = 0{,}14\,\%$.

b) Kolik procent oblohy může astronom ze studny vidět v průběhu celého roku?

Krajské kolo 2018/19, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

Ze zadání je zřejmé, že astronom se nachází na rovníku. Během roku tedy bude mít možnost vidět oblohu, která se nachází na kulovém pásu kolem světového rovníku, přičemž šířka tohoto pásu je α. Plochu pásu S_p vypočteme jako rozdíl ploch dvou kulových vrchlíků. Dostaneme

$$S_\mathrm{p} = 2\pi R^2 \left[1 - \cos\left(90^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\right] - 2\pi R^2 \left[1 - \cos\left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)\right] .$$

Nyní ještě můžeme výraz výše upravit a využít vztahů, které platí mezi goniometrickými funkcemi sinus a kosinus. Máme pak

$$S_\mathrm{p} = 4\pi R^2 \sin\frac{\alpha}{2} .$$

Zlomek oblohy, kterou astronom může během roku pozorovat, bude

$$p_2 = \frac{S_\mathrm{p}}{S_0} = \sin\frac{\alpha}{2} .$$

Po číselném dosazení dostaneme $p_2 \doteq 7{,}5 \cdot 10^{-2} = 7{,}5\,\%$. Je dobré poznamenat, že výsledek by byl stejný, i kdybychom se ptali, kolik procent oblohy může vidět astronom ze studny v průběhu jednoho celého dne.

c) Kolik dní v roce může astronom pozorovat Slunce (třeba i jen částečně)? Průměr slunečního disku je $D = 32'$. Předpokládejte, že Země se pohybuje kolem Slunce po kružnici.

Astronom ve studni se nachází přímo na rovníku. Nebeský rovník mu tudíž prochází nadhlavníkem a pomyslně rozděluje průzor ze studny na dvě poloviny. Astronom neuvidí Slunce ze studny během všech dní v roce: střed disku Slunce mění během roku deklinaci, a tudíž se pro jistá data sluneční kotouč vzdálí od nebeského rovníku o úhlovou vzdálenost rovnou nebo větší než kritická vzdálenost δ_krit, takže ho astronom nebude moci průzorem ze studny vůbec pozorovat. Je zřejmé[1], že tato kritická vzdálenost je $\delta_\mathrm{krit} = \frac{\alpha}{2} + \frac{D}{2}$. Pokud absolutní hodnota deklinace Slunce $\delta_\odot$ bude jen o trochu menší, než je tato kritická vzdálenost, bude ho možné ze studny alespoň na chvíli během dne pozorovat (byť třeba jen částečně).

Nyní je tedy hlavní vyjádřit si závislost deklinace Slunce na čase. Čas t zde můžeme měřit od libovolného okamžiku, nicméně pro počítání bude výhodné si za tento okamžik zvolit průchod Slunce jarním, nebo podzimním bodem. Zvolme tedy třeba průchod jarním bodem, kde víme, že deklinace a rektascenze Slunce jsou v tomto okamžiku obě rovné nula. Protože se Země pohybuje po kružnici, posune se Slunce každý den po ekliptice o stejný úsek. Potom ekliptikální délku λ Slunce můžeme parametrizovat jako

$$\lambda = 360^\circ \cdot \frac{t}{365{,}24\,\mathrm{d}} .$$

Pro nalezení hledané závislosti $\delta_\odot(t)$ využijeme sférický trojúhelník, jehož vrcholy tvoří severní nebeský pól, jarní bod a Slunce. Úhlová vzdálenost jarního bodu Υ od severního

[1] Uvažujeme (jak je psáno v zadání), že astronom pozoruje přímo ze středu studny.

Krajské kolo 2018/19, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

nebeského pólu N je $d_{\Upsilon\mathsf{N}} = 90°$, úhlová vzdálenost Slunce od severního nebeského pólu je $d_{\odot\mathsf{N}} = 90° - \delta_\odot$ a úhlová vzdálenost Slunce od jarního bodu je λ. Též víme, že úhel sevřený rovinou ekliptiky a rovinou rovníku je $\varepsilon = 23{,}5°$. Úhel sevřený rovinou místního poledníku a rovinou ekliptiky ve směru jarního bodu je tedy $\beta = 90° - \varepsilon$. Nyní už známe všechny potřebné údaje pro to, abychom z tohoto trojúhelníku určili závislost deklinace Slunce na čase. Platí

$$\cos d_{\odot\mathsf{N}} = \cos d_{\Upsilon\mathsf{N}} \cos\lambda + \sin d_{\Upsilon\mathsf{N}} \sin\lambda \cos\beta\,,$$

a tedy

$$\delta_\odot = \arcsin\left[\sin\left(\frac{2\pi t}{365{,}25\,\mathrm{d}}\right)\sin\varepsilon\right].$$

Abychom spočítali dny, kdy Slunce bude ze studny vidět, musíme vyřešit nerovnici

$$|\delta_\odot(t)| \leqslant \delta_{\mathrm{krit}} \tag{1}$$

pro proměnnou t. Nalezněme nejprve body, kde nastává rovnost, tedy $\delta_\odot(t) = \delta_{\mathrm{krit}}$ a $\delta_\odot(t) = -\delta_{\mathrm{krit}}$ pro $0\,\mathrm{d} \leqslant t < 365{,}24\,\mathrm{d}$. Dostáváme

$$t = \arcsin\left(\frac{\sin\delta_{\mathrm{krit}}}{\sin\varepsilon}\right)\cdot\frac{365{,}24\,\mathrm{d}}{2\pi}\,, \qquad t = \arcsin\left[\frac{\sin(-\delta_{\mathrm{krit}})}{\sin\varepsilon}\right]\cdot\frac{365{,}24\mathrm{d}}{2\pi}\,,$$

$$t_1 \doteq 11{,}8\,\mathrm{d}\,,\quad t_2 \doteq 170{,}9\,\mathrm{d}\,, \qquad t_3 \doteq 194{,}4\,\mathrm{d}\,,\quad t_4 \doteq 353{,}7\,\mathrm{d}\,.$$

Tedy Slunce má deklinaci splňující nerovnici (1) v obdobích $0\,\mathrm{d} \leqslant t \leqslant t_1$, $t_2 \leqslant t \leqslant t_3$ a $t_4 \leqslant t \leqslant 365{,}24\,\mathrm{d}$. Nyní je dobré si uvědomit, že pokud jarní rovnodennost nastala přesně v poledne, měříme i náš čas t od tohoto poledne. To znamená, že astronom pozoruje Slunce vždy v okamžiku, kdy se „mění číslo dne“, tedy v krátkém časovém intervalu kolem poledne. Kdybychom nyní na chvilku uvažovali, že naše studna není kruhová, ale má tvar čtverce o straně rovné průměru studny (tj. 2 m), viděl by astronom slunce vždy $\left[\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{D}{2}\right)/360°\right]\,\mathrm{d} \doteq 0{,}01\,\mathrm{d}$ před polednem až do $0{,}01\,\mathrm{d}$ po poledni. Protože je ale studna kruhová, uvidí astronom Slunce většinou po kratší časový interval. Proto v intervalu dní $[0\,\mathrm{d}, 11{,}8\,\mathrm{d}]$ (kdy deklinace Slunce roste) uvidí astronom slunce 12krát, v intervalu $[170{,}9\,\mathrm{d}, 194{,}4\,\mathrm{d}]$ (kdy deklinace Slunce klesá) jej uvidí 24krát a v intervalu $[353{,}7\,\mathrm{d}, 365\,\mathrm{d})$ (kdy deklinace Slunce roste) uvidí astronom Slunce 12krát. Astronom tedy bude schopný ze středu studny pozorovat Slunce celkem 48 dní v roce.

Nápověda. Pro sférický trojúhelník ABC se stranami úhlových velikostí a, b, c a vnitřními úhly velikostí α, β, γ platí sinová věta

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta}\,,$$

kosinová věta pro strany

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos\alpha$$

a kosinová věta pro úhly

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos a\,.$$

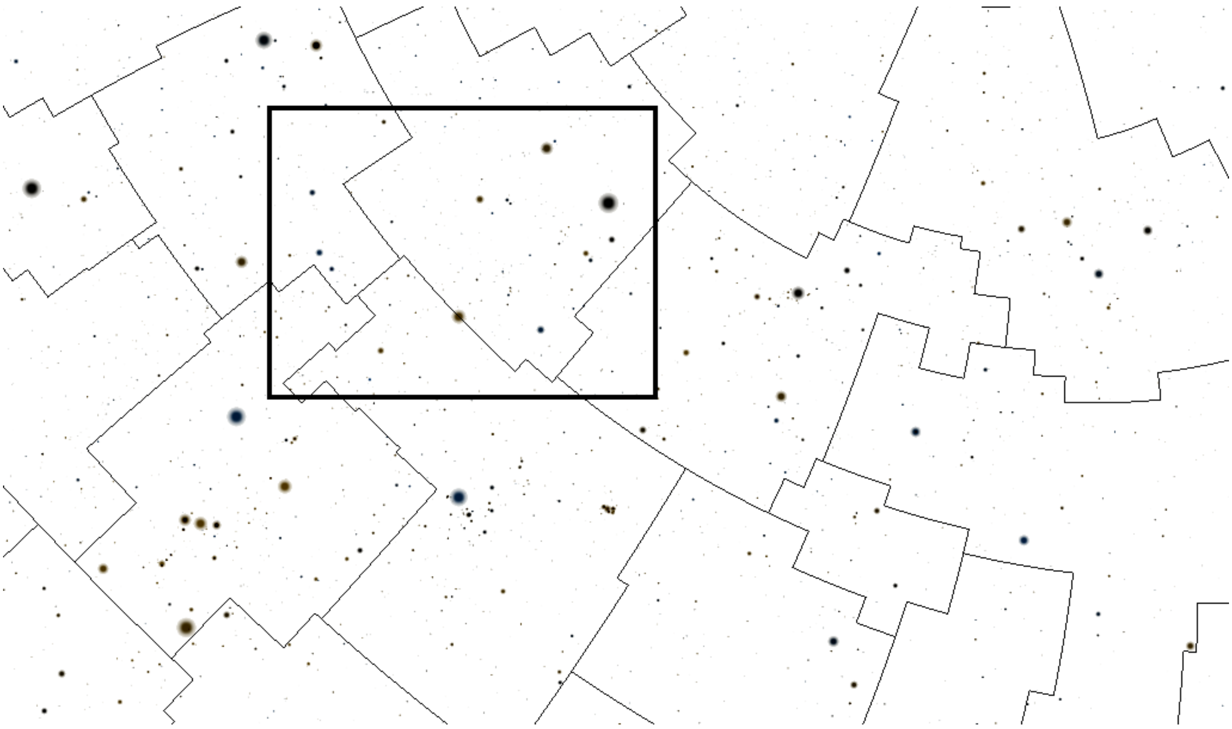
Krajské kolo 2018/19, kategorie CD (1. a 2. ročník SŠ) – řešení

D Praktická

(max. 30 bodů)

Za vhodného počasí vyfotografujte ze stativu část oblohy vyznačenou obdélníkem na mapce. Snímky je možné i skládat. Na svém snímku označte příslušným číslem objekty uvedené v tabulce. Do tabulky pak doplňte požadované údaje (hvězdnou velikost ve filtru V a jméno) o vybraných objektech, jak je naleznete v databázi SIMBAD[2].

Číslo	Označení	$\frac{V}{\text{mag}}$	Jméno	Číslo	Označení	$\frac{V}{\text{mag}}$	Jméno
1	HIP 24608	0,08	Capella	6	Mel 38	5,60	M 37
2	SAO 77168	1,65	Elnath	7	3 Aur	2,69	Hassaleh
3	Cr 82	5,10	M 35	8	TYC 2899-2237-1	3,18	Haedus
4	HR 2286	3,01	Tejat	9	HD 37202	2,95	Tianguan
5	IRAS 05558+4456	1,90	Menkalinan	10	WDS J05191+4006A	4,65	Alhiba



[2] http://simbad.u-strasbg.fr/simbad/