Krajské kolo 2021/22, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)

Identifikace

Na každý list se zadáním nebo řešením napište dolů svoje jméno, příjmení a identifikátor. Neoznačené listy nebudou opraveny!

Student

jméno: příjmení: identifikátor: __ __ __ __ __

Škola

název: město: PSČ:

Hodnocení

A___ **B**___ **C**___ **D**___ **Σ** (90 b.) ___

Účast v AO se řídí organizačním řádem, č.j. MŠMT – 14 896/2012-51. Organizační řád a propozice aktuálního ročníku jsou k dispozici na olympiada.astro.cz.

Milé řešitelky, milí řešitelé,

vítáme vás u řešení úloh krajského kola kategorie AB 19. ročníku Astronomické olympiády!

Stejně jako loni se letos krajské kolo kvůli koronavirové situaci skládá pouze z korespondenční části, tedy přehledového online testu (úloha A), dvou teoretických úloh (B a C) a jedné praktické (úloha D). Úlohy tento rok rovněž nebudete posílat v obálce klasickou poštou, ale naskenované je uploadujete skrze naše webové rozhraní.

Neformální dění okolo olympiády můžete sledovat na naší Facebookové stránce a také na Instagramu. Prostřednictvím zpráv je zde možné klást dotazy přímo Ústřední komisi.

I letos stojí za to si připomenout celou řadu astronomických událostí a pokud tak učiníte kliknutím na přiložené odkazy, jistě se něco zajímavého dozvíte! Některé se staly inspirací pro zadání úloh tohoto kola:

- *v roce 2022 si připomínáme −45 let od roku, kdy se odehrává děj filmu Interstellar,*
- *8. ledna 2022 tomu bude 380 let od úmrtí Galilea Galilei,*
- *v roce 1992, tedy před 30 lety, byl u pulsaru PSR B1257+12 objeven první exoplanetární systém.*

Z předpověditelných astronomických úkazů v roce 2022 zmiňme například úplné zatmění Měsíce 16. května 2022, ze kterého ovšem z ČR spatříme pouze částečnou fázi v ranních hodinách, než se náš souputník odebere pod obzor.

Přejeme vám bystrou mysl a mnoho příjemných chvil při řešení všech úloh! ☺

Ústřední komise Astronomické olympiády

Důležité kontakty:

- Internetové stránky a e-mail Astronomické olympiády:
  https://olympiada.astro.cz, olympiada@astro.cz
- Webová adresa pro upload naskenovaných řešení úloh:
  https://olympiada.astro.cz/korespondencni

Termín odeslání: 7. 2. 2022

Celkem lze v krajském kole získat maximálně **100 bodů**. Do celostátního kola postupuje 20 nejlepších řešitelů krajských kol, **kteří získali nenulový počet bodů z praktické úlohy**.

Krajské kolo 2021/22, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)

A Přehledový test

(max. 30 bodů)

Úvodní test se řeší online na https://olympiada.astro.cz/korespondencni. Přihlašovací údaje přišly úspěšným řešitelům školního kola e-mailem nebo je dostanete od svého učitele, který je může zjistit v sekci pro učitele na https://olympiada.astro.cz/ucitel. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou. U problémů s řešením testu oznámených po **24. 1. 2022** bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení.

B Vesmírná stanice

(max. 20 bodů)

V závěru filmu Interstellar (2014) se hlavní hrdinové nachází na vesmírné stanici, která zachránila lidstvo před zánikem. Předpokládejme, že stanice má tvar válce o poloměru $r = 100\,\mathrm{m}$ a délce $l = 200\,\mathrm{m}$. Stanice se nachází ve volném prostoru, rotuje podél své osy symetrie, a proto obyvatelé pociťují tíhu stejnou jako na Zemi optimální pro jejich těla.

a) Jakou úhlovou rychlostí ω se musí stanice otáčet, aby její obyvatelé pociťovali stejnou tíhu jako na Zemi? Jaká je perioda T otáčení stanice kolem její osy?

Ve filmu jsme mohli vidět děti hrající baseball na hřišti na stanici. Po odpálení míček letěl stanicí a rozbil střešní okno domu, který byl přibližně nad nimi. V následujících částech budeme analyzovat pohyb hmotného bodu v prostoru stanice a pro jednoduchost zanedbáme odpor vzduchu.

b) Jakou rychlostí musí děti odpálit míček (specifikujte velikost a směr nebo definujte vektor), aby z pohledu pozorovatele ve stanici obíhal těsně nad povrchem stanice po kruhové dráze? Jaká je perioda oběhu míčku?

V předchozím případě došlo k tomu, že míček se po odpalu opakovaně vracel k hráči, který ho odpálil. Kruhová dráha však není jedinou, po které se míček vrátí k hráči, který ho odpálil. Ve skutečnosti je takových trajektorií nekonečně mnoho a přirozeným parametrem, který je charakterizuje, je čas, za který se vrátí míček na místo svého odpalu.

c) Jakou rychlostí (specifikujte velikost a směr nebo definujte vektor) musí hráč odpálit míček, aby se k němu vrátil za čas $t_1 = \frac{T}{2}$ a $t_2 = \frac{3T}{2}$? Výsledek vyjádřete pomocí r a T.

d) Jakou rychlostí (specifikujte velikost a směr nebo definujte vektor) musí hráč odpálit míček, aby se k němu vrátil za obecný čas t?

e) Kosmonaut ve stanici se vydal z jejího obvodu po žebříku k ose stanice zkontrolovat osvětlení. Jakou práci vykonal, pokud váží 75 kg?

Nyní se zamysleme nad problematikou roztáčení stanice. Pokud stanice obíhá poblíž Slunce, tak může mít dostatek elektrické energie ze solárních článků. S hmotou samotnou však musí šetřit. Proto se nabízí použít pro pohon iontové motory, které mají vysokou rychlost vytékajícího paliva. Předpokládejme, že iontové motory budoucnosti urychlují jednou ionizované atomy xenonu (o relativní atomové hmotnosti $A_\mathrm{r} = 131$) v elektrickém poli o napětí $10\,\mathrm{kV}$. Iontový motor si můžete představit jako deskový kondenzátor, kde u kladné elektrody dochází k ionizaci xenonu, ten je urychlen k záporné elektrodě, která je vyrobena z tenkých drátů, takže ionty mohou proletět za ni a pak se pohybují volně. (Ve skutečnosti je nutné odlétající ionty neutralizovat elektrony, ale procesy vně kondenzátoru zanedbáme.) Hmotnostní průtok xenonu z motoru je $10\,\mathrm{mg}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

f) Jaká je rychlost atomů xenonu vylétajících z iontového motoru?

g) Jak velká je tahová síla iontového motoru?

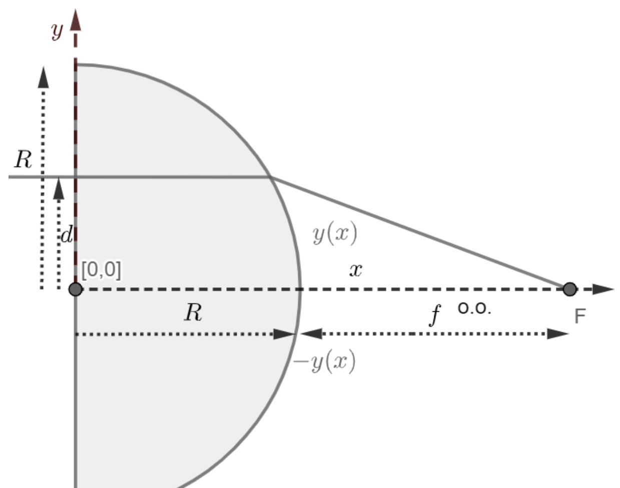
K roztočení stanice je použito 200 dvojic iontových motorů umístěných na obvodu stanice. Motory v každé dvojici jsou přitom umístěny na protilehlých místech obvodu stanice a spaliny z nich míří tečně k plášti válce, kolmo k ose válce a vzájemně do opačných směrů. Pro následující výpočet předpokládejte, že hmotnost stanice $M = 200\,000\,\mathrm{t}$ je soustředěna zejména na plášti stanice, a že hmotnost paliva m potřebná pro roztočení stanice je zanedbatelná vůči hmotnosti stanice.

h) Jak dlouho se stanice bude roztáčet než dosáhne rychlosti rotace v první části tohoto příkladu?

C Kulová vada

(max. 10 bodů)

Se jménem Galileo Galilei je neodmyslitelně spjatý vynález dalekohledu, přesněji jeho vylepšení. 8. ledna 2022 tomu bude přesně 380 let, kdy tento velikán kráčel po Zemi naposledy, a při příležitosti tohoto výročí budeme studovat tzv. *kulovou vadu.* Tato vada je přítomná u optických čoček, a proto se v principu objevuje i u čočkových dalekohledů. Projevuje se tím, že čočka má více ohnisek.[1] Vada je způsobená tím, že optická rozhraní optických čoček jsou kulové plochy (části sféry), což dává vadě své jméno. **Neomezujeme se na *paraxiální aproximaci***, tj. zajímáme se o paprsky jdoucí nejenom v těsném okolí optické osy. Ve skutečnosti se podobná vada objevuje i u jiných optických rozhraní, jak se v úloze sami přesvědčíte.



Obrázek 1: Schéma lomu světla na čočce s rotační symetrií: příčný řez.

Budeme se nejprve zabývat čočkami podle obrázku 1: čočka má dvě hladká optická rozhraní, první z nich je rovinný disk o poloměru R, druhé je hladká vypuklá plocha, která nenarušuje spojitou rotační

[1] Přitom tato vada nemá souvislost se barvou světla: i pro světlo jedné vlnové délky bude existovat více ohnisek.

Krajské kolo 2021/22, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)

symetrii čočky, například část sféry, paraboloidu, apod. Budeme uvažovat paprsky dopadající kolmo na rovinné rozhraní a bude nás zajímat, jak se při průchodu čočkou lomí. Díky symetrii čočky se problém zjednodušuje na popis šíření a lomu paprsků v libovolné rovině, která obsahuje celou osu symetrie. Tato rovina je příčným řezem čočky a schématicky této rovině odpovídá rovina xy v obrázku 1. Vypuklé rozhraní je popsáno jistou funkcí $y(x)$, jak naznačuje tentýž obrázek.

Definujme optickou osu a ohnisko čočky. Vzdálenost paprsku světla rovnoběžného s osou symetrie čočky od této osy budeme značit d. Pokud takovýto paprsek dopadne kolmo na rovinné rozhraní a následně se na druhém optickém rozhraní lomí, protne osu symetrie v jednom bodě. Díky rotační symetrii protnou všechny paprsky rovnoběžné s osou symetrie, mající stejnou vzdálenost od této osy, stejný bod F na ose symetrie. Pak o ose symetrie můžeme mluvit jako o optické ose (o.o.) a o společném bodu protnutí paprsků F jako o ohnisku. Vzdálenost F od nejbližšího bodu optického rozhraní, ležícího na optické ose/ose symetrie, budeme značit f a budeme o ni mluvit jako o ohniskové vzdálenosti[2]

a) Pokud čočku osvítíme tak, že na celé její rovinné rozhraní dopadají kolmé paprsky, určete vzdálenost f jako funkci d pro obecná R, n a její krajní hodnoty, $f_{\min}, f_{\max}$, je-li druhým optickým rozhraním *polosféra*, s funkcí $y(x)$

$$y(x) = \sqrt{R^2 - x^2}\,, \qquad x \in [0, R]\,.$$

Nyní čočku z předchozí úlohy nahradíme jinou, která bude mít parabolické rozhraní namísto kulového, popsané funkcí

$$y(x) = \sqrt{R^2 - Rx}\,, \qquad x \in [0, R]\,.$$

b) Určete takový interval hodnot indexu lomu n, aby mohl v čočce ještě nastat totální odraz. Váš výsledek by neměl záviset na parametru R.

c) Uvažte, že čočka má n z přechozí podúlohy. Najděte $f_{\min}$ a $f_{\max}$ pro tuto čočku.

Není přitom potřeba odvozovat funkci $f(d)$, můžete výhodně využít výsledků úkolu a).

Nápověda: K vyřešení úkolu b) vám může být užitečné umět zkonstruovat tečnu ke grafu funkce $y(x)$, označme ji $h(x) = kx + q$. Pokud je grafem funkce $y(x)$ výše popsaná část *paraboly*, bude tečna v bodě x mít směrnici

$$k = -\frac{1}{2}\frac{R}{\sqrt{R^2 - Rx}}\,.$$

Na závěr uvážíme homogenní kouli o indexu lomu n a poloměru R, na kterou posvítíme svazkem rovnoběžných paprsků o stejném poloměru R, viz obrázek 2.

d) Určete explicitně f jako funkci úhlu dopadu α, tedy $f \equiv f(\alpha)$.

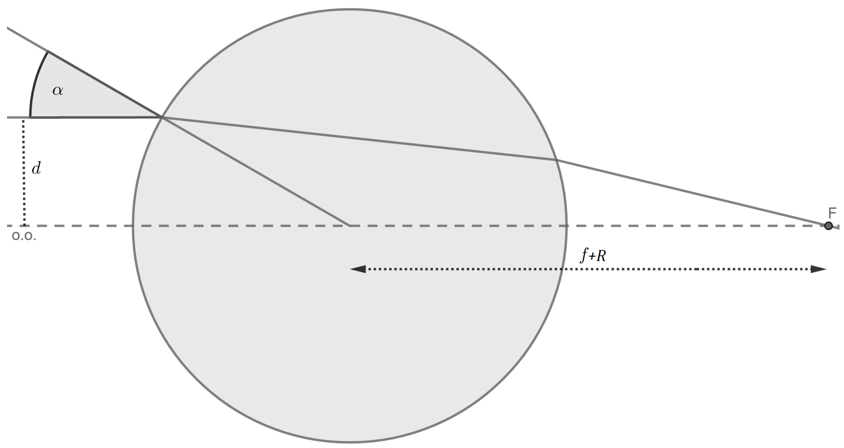
Nápověda: Měli byste odvodit tento vztah

$$f + R = \frac{R}{2}\frac{1}{\cos\alpha - \frac{1}{n^2}\sin\alpha\sin(2\alpha) - \frac{1}{n}\cos(2\alpha)\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}\sin^2\alpha}}\,,$$

nebo takový, který je na něj jednoduchými manipulacemi upravitelný.

e) Určete minimální $f_{\min}$ a maximální $f_{\max}$ hodnotu obrazové ohniskové vzdálenosti.

[2]Ve skutečnosti není tato definice zcela správná. Běžně se zavádí ohnisková vzdálenost jako vzdálenost F od *hlavní roviny*, což je koncept, který zde pro zjednodušení zavádět nebudeme.



Obrázek 2: Schéma lomu světla na kouli: příčný řez

D Praktická úloha

(max. 30 bodů)

Část 1 – Mezní hvězdná velikost

Použijte alespoň dvě různé metody k určení mezní hvězdné velikosti v zenitu pro vámi zvolené pozorovací stanoviště. Ve vašem řešení důkladně zdokumentujte místo a čas pozorování, fázi Měsíce a detaily vaší metodologie. Porovnejte vaše výsledky pro různé metody. Před každým pozorováním se nezapomeňte důkladně adaptovat na tmu!

Část 2 – Exoplanety u pulsaru

Závod o detekci první planety mimo Sluneční soustavu (tedy exoplanety), který vrcholil v období přibližně před 30 lety, měl nečekané vítěze: radioastronomy Aleksandra Wolszczana a Dale Fraila, jenž 9. ledna 1992 oznámili světu objev dvou planet obíhajících pulsar PSR B1257+12. V této úloze se zkusíte vžít do jejich role a na základě dat z pozorování změn periody příchozích pulsů na čase usoudíte nejen na přítomnost exoplanet, ale vypočítáte rovněž některé jejich parametry.

Za tímto účelem využijete vhodný software určený k prokládání součtu harmonických funkcí (sinusovek) časovými řady s nepravidelným vzorkováním. Konečnou volbu necháváme na vašem uvážení, doporučujeme nicméně následující možnosti.

- `Period04`: využívá metodu diskrétní Fourierovy transformace a postupné odečítání frekvencí. Dostupný na http://www.period04.net/.
- `SparSpec`: využívá metodu řídkých reprezentací k předpovězení frekvencí obsažených v časové řadě. Dostupný na http://userpages.irap.omp.eu/~hcarfantan/SparSpec1.4/SparSpec_html.html.
- Algoritmy založené na metodě minimalizace fázové disperze (angl. *Phase Dispersion Minimization – PDM*). Dostupné ve formě skriptů pro Python z různých zdrojů na internetu.

Krajské kolo 2021/22, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)

V tabulce 1 najdete data z měření změn periody pulsů přicházejících od PSR B1257+12 na čase. Odpovídající datový soubor si můžete rovněž stáhnout z adresy https://olympiada.astro.cz/zadani/PSRB1257+12.dat. Tato data byla opravena o roční variaci vzájemné radiální rychlosti pozorovatele vůči systému, která je způsobena oběhem Země kolem Slunce. V následujících úkolech budeme předpokládat, že pozorované změny periody pulsů jsou způsobeny přítomností dvou exoplanet obíhajících kolem tohoto pulsaru po kruhových drahách.

a) S pomocí vámi zvoleného programu analyzujte přiloženou datovou řadu a určete hodnoty významných frekvencí, které se v sérii vyskytují. Vaši volbu a kritérium pro posouzení významnosti diskutujte. Vykreslete závislost naměřených dat na čase. Dále vytvořte model změn periody v čase jako součet řady sinusovek s vámi určenými frekvencemi. Tento model překreslete přes skutečná měření a diskutujte kvalitu fitu.

b) Určete střední hodnotu $\overline{P}$ periody příchozích pulsů.

c) Určete první dvě dominantní frekvence f_1, f_2 přispívající do fitu. Určete odpovídající oběžné periody T_1, T_2 exoplanet obíhajících pulsar (ve dnech).

d) Určete rovněž amplitudy ΔP_1, ΔP_2 změn periody pulsů odpovídající každé z exoplanet.

Odhadovaná hmotnost pulsaru PSR B1257+12 činí $M_* = 1{,}4 M_\odot$.

e) Pro obě exoplanety vypočtěte poloměr a_p jejich oběžných drah kolem pulsaru v astronomických jednotkách.

f) Pro každou z exoplanet rovněž vypočtěte její hmotnostní parametr $M_\mathrm{p} \sin i$, kde M_p je hmotnost exoplanety a i je úhel sevřený mezi normálou k rovině její oběžné dráhy a směrem k pozorovateli. Výsledné hodnoty uveďte v jednotkách hmotnosti Země $M_\oplus$.

V úloze f) nezapomeňte diskutovat možný vliv radiálního pohybu hmotného středu exoplanetárního systému vzhledem k Zemi.

Tabulka 1: Data z porozování pulsaru PSR B1257+12 – epocha měření v rocích a rozdíl naměřené periody pulsů v nanosekundách od hodnoty $P_0 = 6\,218\,530\,\mathrm{ns}$.

Epocha	$\frac{P-P_0}{\mathrm{ns}}$	Epocha	$\frac{P-P_0}{\mathrm{ns}}$	Epocha	$\frac{P-P_0}{\mathrm{ns}}$
1990.54	1.92427	1991.30	1.93559	1991.41	1.93133
1990.55	1.92182	1991.30	1.93404	1991.56	1.94910
1990.58	1.92112	1991.31	1.93629	1991.60	1.93909
1990.60	1.92843	1991.31	1.93599	1991.66	1.92247
1990.64	1.93399	1991.35	1.94480	1991.68	1.92563
1990.71	1.92823	1991.37	1.94270	1991.69	1.92708
1990.79	1.93999	1991.38	1.94029	1991.70	1.93038
1990.85	1.93444	1991.38	1.94089	1991.71	1.93479
1990.89	1.91832	1991.38	1.94164	1991.73	1.93884
1990.92	1.91852	1991.38	1.94204	1991.77	1.93939
1990.96	1.93173	1991.39	1.93634	1991.81	1.93419
1990.98	1.94104	1991.39	1.93789	1991.83	1.93243
1991.21	1.93994	1991.39	1.93939	1991.85	1.93639
1991.22	1.93954	1991.40	1.93444		