Astronomická olympiáda | **SLEZSKÁ UNIVERZITA** FYZIKÁLNÍ ÚSTAV V OPAVĚ | Česká astronomická společnost www.astro.cz olympiada.astro.cz

Krajské kolo 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)

Identifikace

Na každý list se zadáním nebo řešením napište dolů svoje jméno, příjmení a identifikátor. Neoznačené listy nebudou opraveny!

Student

jméno: příjmení: identifikátor: __ __ __ __ __

Škola

název: město: PSČ:

Hodnocení

A____ **B**____ **C**____ **D**____ **Σ** (100 b.) ____

Účast v AO se řídí organizačním řádem, č.j. MŠMT – 14 896/2012-51. Organizační řád a propozice aktuálního ročníku jsou k dispozici na olympiada.astro.cz.

Milé řešitelky, milí řešitelé,

vítáme vás u řešení úloh krajského kola kategorie AB 20. ročníku Astronomické olympiády!

Stejně jako v minulých letech na vás čeká přehledový online test (úloha A), dvě teoretické úlohy (B a C) a jedna praktická (úloha D). Úlohy tento rok rovněž nebudete posílat v obálce klasickou poštou, ale naskenované je uploadujete skrze naše webové rozhraní.

Neformální dění okolo olympiády můžete sledovat na naší Facebookové stránce a také na Instagramu. Prostřednictvím zpráv je zde možné klást dotazy přímo Ústřední komisi.

I letos stojí za to si připomenout celou řadu astronomických událostí a pokud tak učiníte kliknutím na přiložené odkazy, jistě se něco zajímavého dozvíte! Některé se staly inspirací pro zadání úloh tohoto kola:

- *27. dubna 2023 uplyne 140 let od úmrtí francouzského matematika a astronoma Édouarda Rocheho,*
- *15. srpna 2022 tomu bylo 130 let od narození francouzského fyzika a aristokrata Louise de Broglieho.*

Z předpověditelných astronomických úkazů v roce 2023 zmiňme například konjunkci Venuše a Jupitera, dvou nejjasnějších planet pozorovatelných na pozemské obloze. K největšímu přiblížení dojde 2. března 2023. Dále stojí za zmínku sváteční částečné zatmění Měsíce 28. října, které se odehraje za doprovodu planety Jupiter (pouhých 6 stupňů od Měsíce).

Přejeme vám bystrou mysl a mnoho příjemných chvil při řešení všech úloh! ☺

Ústřední komise Astronomické olympiády

Důležité kontakty:

- Internetové stránky a e-mail Astronomické olympiády:
  `http://olympiada.astro.cz`, `olympiada@astro.cz`
- Webová adresa pro upload naskenovaných řešení úloh:
  `https://olympiada.astro.cz/korespondencni`

Termín odeslání: 3. 2. 2023

Celkem lze v krajském kole získat maximálně **100 bodů**. Do celostátního kola postupuje 20 nejlepších řešitelů krajských kol, **kteří získali nenulový počet bodů z praktické úlohy**.

Krajské kolo 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)

A Přehledový test

(max. 30 bodů)

Úvodní test se řeší online na http://olympiada.astro.cz/korespondencni. Přihlašovací údaje přišly úspěšným řešitelům školního kola e-mailem nebo je dostanete od svého učitele, který je může zjistit v sekci pro učitele na http://olympiada.astro.cz/ucitel. Velmi doporučujeme řešení testu neodkládat na poslední dny před uzávěrkou. U problémů s řešením testu oznámených po **27. 1. 2023** bohužel nemůžeme zaručit jejich včasné vyřízení.

B Rozpadající se měsíc

(max. 20 bodů)

Plynní obři ve sluneční soustavě mají poměrně velkou hmotnost a generují silné gravitační pole, které jim umožňuje udržet si desítky měsíců. Blíže u planety může být její gravitace tak silná, že způsobí rozpad celého měsíce, čímž vznikne prstenec. V této úloze bude úkolem najít mezní vzdálenost měsíce a planety, ve které se začne měsíc rozpadat.

Uvažujme planetu o poloměru R a hustotě ρ_p a její měsíc o poloměru r a hustotě ρ_m. Dále budeme zkoumat dva případy rotace měsíce: nerotující měsíc a měsíc s vázanou rotací. Vzhledem ke složitosti úlohy budeme uvažovat několik zjednodušení. Předpokládejme, že hmotnost měsíce je mnohem menší než hmotnost planety, planeta zůstává v klidu a měsíc ji obíhá po kruhové trajektorii o poloměru d (Vzdálenost d je tedy vzdáleností středů planety a měsíce. Dále předpokládejme, že měsíc je tuhá homogenní koule a gravitace planety jej nebude deformovat. Nakonec budeme uvažovat, že poloměr měsíce je mnohem menší než poloměr jeho trajektorie, tedy $r \ll d$.

a) Načrtněte planetu s měsícem a označte bod na povrchu měsíce, který je nejblíže planetě, písmenem A. Bod A se pohybuje po kruhové trajektorii okolo planety: určete její poloměr v obou případech rotace měsíce.

b) Určete kvadrát ω^2 úhlové rychlosti bodu A v obou případech rotace měsíce. Výsledek vyjádřete pomocí zadaných veličin a gravitační konstanty.

c) Představte si, že v bodě A povrchu měsíce nejblíže planetě se nachází pozorovatel. Jaké tíhové zrychlení v bodě A pozoruje (například tak, že upustí předmět volným pádem na povrch měsíce)? Výsledek vyjádřete pomocí zadaných veličin a gravitační konstanty. Uvažujte oba případy rotace. V případě nerotujícího měsíce se omezte pouze na okamžik, kdy se pozorovatel nachází na povrchu měsíce v bodě A, který je nejblíže planetě.

d) Představte si, že parametry planety a měsíce jsou konstantní, a že měsíc se působením vnějších vlivů přibližuje k planetě (poloměr d jeho kruhové trajektorie se velmi pomalu zmenšuje). V jaké vzdálenosti d se začne rozpadat? Uvažujte oba případy rotace.

Nápověda: Tíhové zrychlení položte rovné nule a využijte aproximace $(1+x)^n \approx 1 + nx$ pro $x \ll 1$.

Krajské kolo 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)

C Jak horko je uvnitř hvězdy?

(max. 20 bodů)

Většinu hvězd tvoří oblaka horkého ionizovaného plynu, které vyzařují světlo i po miliardy let díky *termonukleární fúzi*, která probíhá v jejich centrálních částech, konkrétně slučováním vodíku na helium. V této úloze se budete zabývat určitými aspekty tohoto procesu.

Hvězdu budeme považovat za kouli tvořenou z čistě ionizovaného vodíku (protony a elektrony mají ve hvězdě stejné zastoupení), který se přibližně chová jako ideální plyn. Z pohledu klasické fyziky k fúzi dvou jader vodíku (coby bodových objektů) dojde tehdy, pokud se jejich vzájemná vzdálenost zmenší na $d = 10^{-15}$ m. To je škála, na které silná interakce začne být dominantní, a odpudivá Coulombovská interakce už nemůže zabránit fúzi jader.

a) Za předpokladu, že se protony pohybují se střední kvadratickou rychlostí $v_{\mathrm{kvad,p}}$, odhadněte minimální teplotu T ideálního plynu, aby se jádra přiblížila na vzdálenost $d = 10^{-15}$ m. Vyjděte ze zákona zachování energie, navíc můžete ignorovat brzdné záření spojené s přibližováním částic k sobě.

Předchozí výpočet teploty byl proveden na základě úvah klasické fyziky (tj. kvantový aspekt částic nebyl vzat v potaz). Abychom rozhodli, zda tento výpočet (ne)dává rozumný odhad teploty uvnitř hvězdy, potřebujeme spočítat tuto teplotu ještě jiným nezávislým způsobem.

K tomu využijeme podmínku hydrostatické rovnováhy hvězdy: hvězda jako masa ionizovaného plynu je v klidu a jejímu gravitačním smrštění zabraňuje gradient tlaku, který kompenzuje gravitační sílu kdekoliv uvnitř hvězdy. Klíčová pro nás bude rovnice hydrostatické rovnováhy

$$-\frac{\Delta P}{\Delta r} = \frac{G m(r) \rho(r)}{r^2},$$

kde na levné straně stojí (mínus) gradient tlaku, na pravé gravitační síla. Interval s krajními body r a $r + \Delta r$ vymezuje tenkou kulovou slupku o tloušťce $\Delta r \ll R$ se středem uprostřed hvězdy, přitom R je poloměr hvězdy, $m(r)$ je hmotnost koule pod touto slupkou, $\rho(r)$ je hustota plynu ve slupce a $\Delta P = P_{\mathrm{out}} - P_{\mathrm{in}}$ je rozdíl v tlacích působících na vrstvu ze shora (odpovídající síla míří do centra hvězdy) a zdola (odpovídající síla míří ven od centra hvězdy). Nakonec G je gravitační konstanta.

b) Využijte rovnici hydrostatické rovnováhy k *řádovému odhadu* teploty ideálního plynu T ve středu hvězdy. Výsledek bude záviset pouze na hmotnosti a poloměru hvězdy a fyzikálních konstantách. Očekává se, že najdete obecný výraz, nikoliv číselnou hodnotu. Ignorujte složitou strukturu hvězdy.

c) S pomocí předchozího výsledku najděte poměr M/R pouze jako funkci teploty a fundamentálních konstant.

d) V prvním bodě úlohy jste určili spodní hranici na hodnotu T z klasických úvah, což po dosazení do vztahu pro M/R dává v principu $(M/R)_{\mathrm{min}}$. Dosaďte do vztahu z předchozího bodu úlohy tuto teplotu a vyčíslete. Srovnejte číselně s $M_{\mathrm{Slunce}}/R_{\mathrm{Slunce}}$. Co tento výsledek znamená? Stručně komentujte.

Teď se myšlenkově vrátíme k prvnímu bodu zadání. Pokusíme se odhadnout minimální teplotu pro běh termonukleární reakce uvnitř hvězdy za uvážení vlnové povahy částic (čistě kvantově mechanický efekt).

Označme de Broglieho vlnovou délku částice o rychlosti $v_{\mathrm{kvad,p}}$ jako λ_{p}. Pak vězte, že vzdálenost, na kterou se částice musí k sobě dostat, aby mohla nastat fúze, už nebude 10^{-15} m (jak jsme uvažovali v čistě klasickém výpočtu), ale $d = \lambda_\mathrm{p}/\sqrt{2}$ – poté nastává kvantové tunelování. Tedy vzdálenost, na kterou se mají částice k sobě přiblížit, je až na číselný faktor rovna de Broglieho vlnového délce, kterou částice měly při rychlosti $v_\mathrm{kvad,p}$.

e) Určete obecný předpis pro teplotu T potřebnou k fúzi a najděte její číselnou hodnotu. Využijte opět zákona zachování energie.

f) Proveďte analogický výpočet tomu v úloze d), tzn. určete obecně poměr M/R a pak ho vyčíslete. Je výsledek shodný s tím, co jsme dostali, když jsme přemýšleli klasicky? Stručně komentujte.

V předchozím kroku jste přišli na to, že M/R lze vyjádřit pouze pomocí fundamentálních konstant. Alespoň to platí pro hvězdy spalující vodík, například Slunce. Zdálo by se tak, že hmotnost hvězdy může být libovolná, dokud ve hvězdě probíhá termonukleární fúze. To není ale úplně pravda, jak se dále přesvědčíte.

Aby bylo možné hvězdu považovat za ideální plyn, musí být střední vzdálenost mezi částicemi, které ji tvoří, větší než jejich de Broglieho vlnová délka.

g) Ukažte, že elektrony s $v_\mathrm{kvad,e}$ mají větší de Broglieho vlnovou délku než protony s $v_\mathrm{kvad,p}$.

Střední vzdálenost mezi elektrony d_e musí být větší než je jejich de Broglieho vlnová délka λ_e, konkrétně uvažujte $d_\mathrm{e} \geq \lambda_\mathrm{e}/\sqrt{2}$. Pokud by toto mělo být porušeno, byl by plyn elektronů degenerovaný a ten má jiné vlastnosti než má plyn ideální, který jsme předpokládali.

h) Použijte tuto informaci, abyste odvodili minimální hmotnost a minimální poloměr hvězdy, aby elektrony bylo možné stále považovat za ideální. Výsledky uveďte v násobcích poloměru a hmotnosti Slunce.

D Rozbřesk a soumrak: sféry a kuropění

(max. 30 bodů)

V této úloze se pokusíte určit vaši zeměpisnou šířku pozorováním východů a západů Slunce. Nejprve určíte svou zeměpisnou šířku z délky trvání bílého dne a následně ji určíte z délky trvání západu Slunce.

a) Změřte čas východu Slunce t_1 a západu Slunce t_2 v jeden den. Nezapomeňte si poznamenat a ve vašem řešení uvést místa, odkud proběhla měření a datum pozorování. Určte délku bílého dne Δ v hodinách. K řešení přiložte fotku sebe při pozorování, například selfie se západem Slunce. Nezapomeňte užít adekvátní ochrany očí!

b) Odvoďte vztah pro trvání bílého dne Δt, tj. čas který Slunce stráví nad obzorem, v závislosti na deklinaci Slunce δ a zeměpisné šířce pozorovatele ϕ. V tomto okamžiku neuvažujte úhlový rozměr Slunce na obloze. Nakonec vyjádřete zeměpisnou šířku jako funkci délky bílého dne a deklinace Slunce.

Nápověda: užijte tzv. nautického sférického trojúhelníku, ve kterém uvažujte nulovou výšku nad obzorem.

c) Z délky bílého dne, kterou jste naměřili v části a), určete zeměpisnou šířku místa pozorování, pomocí výsledků z části b). Nezapomeňte uvést odhad nejistoty. Deklinaci Slunce v den měření si můžete najít.

Krajské kolo 2022/23, kategorie AB (3. a 4. ročník SŠ)

d) Změřte délku trvání jednoho západu Slunce, tedy čas mezi okamžikem kontaktu horního a dolního limbu s obzorem. Uveďte místo pozorování a fotografii.

e) Odvoďte vztah pro rozdíl času mezi horním a dolním kontaktem Slunce.

f) Určete zeměpisnou šířku pozorovatele dosazením měřené délky západu do teoretického vztahu. Výslednou rovnici řešte graficky, například pomocí Desmos nebo Geogebra. Nezapomeňte na odhad nejistoty měření.

g) Diskutujte vliv atmosférické refrakce a reálného horizontu, porovnejte výsledek získaný z délky dne s výsledkem určeným pomocí délky západu. Zamyslete se nad tím, co jsou podstatné zdroje nejistot měření a zkuste navrhnout, jak by šlo experiment vylepšit za účelem zmenšení nejistot.